Musterlösung zum Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Beweis durch vollständige Induktion:

Es ist $f^{(1)}(x) = f'(x) = \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y = y'$ und

$$(1-1)!\,\sin\left(1\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos^1 y \;=\; \cos^2 y\ .$$

Die Behauptung stimmt also für $n = 1$ (Induktionsanfang).

Sei nun $f^{(n)}(x) = (n-1)!\,\sin\left(n(y+\frac{\pi}{2})\right)\cos^n y$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}\right]'(x) \;=\; (n-1)!\left[\sin\left(n(y+\tfrac{\pi}{2})\right)\cos^n y\right]' \;=\\
&= (n-1)!\left[ny'\cos\left(n(y+\tfrac{\pi}{2})\right)\cos^n y + ny'(-\sin y)\cos^{n-1} y\,\sin\left(n(y+\tfrac{\pi}{2})\right)\right]\\
&= n!\,y'\cos^{n-1} y\left[\cos y\cos\left(n(y+\tfrac{\pi}{2})\right) - \sin y\,\sin\left(n(y+\tfrac{\pi}{2})\right)\right]\\
&= n!\cos^2 y\cos^{n-1} y\cos\left((n+1)y + n\tfrac{\pi}{2}\right) \;=\; n!\cos^{n+1} y\sin\left((n+1)(y+\tfrac{\pi}{2})\right)
\end{aligned}$$

und das ist die Behauptung für $n+1$.

Mit $x_0 = 0$ ist auch $y_0 = \arctan x_0 = 0$. Die Euler Formel liefert daher

$$f^{(n)}(0) \;=\; (n-1)!\,\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos^n(0) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die Taylor-Reihe von $f(x) = \arctan x$ erhält man daher

$$T_f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\ .$$

Für das n-te Restglied $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ liefert die Darstellung nach Lagrange:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}\right| \quad \text{für ein } \theta \in]0,1[\\
&= \frac{n!}{(n+1)!}\left|\sin[(n+1)(y+\tfrac{\pi}{2})]\right|\,|\cos^{n+1} y|\,|x|^{n+1} \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}\\
&\le \frac{1}{n+1}|x|^{n+1} \;\to\; 0 \quad \text{für } n \to \infty,\ |x| \le 1\ .
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Taylorreihe von arctan gegen $\arctan x$ für $|x| \le 1$.
Insbesondere ist

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \arctan 1 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots\ .$$

Aufgabe 2

Es ist $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ für $|t| < 1$ (geometrische Reihe). Potenzreihen konvergieren auf kompakten Mengen im Inneren ihres Konvergenzintervalls gleichmäßig. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ für $t < |x| < 1$ gleichmäßig und darf daher gliedweise integriert werden. Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \arctan' t\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots .
\end{aligned}$$

Da jede konvergente Potenzreihe die Taylorreihe der dargestellten Funktion im Entwicklungspunkt ist, muß diese Reihe die Taylorreihe von $\arctan x$ um $x_0 = 0$ sein. Der Konvergenzradius ist $\varrho = 1$.

Aufgabe 3

Es ist

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

Damit erhält man das zweite Taylorpolynom in der Form

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}\,.$$

Die Restglieddarstellung von Lagrange liefert die folgende Abschätzung für $0 \le x \le \pi/4$:

$$\begin{aligned}
|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3\right| \\
&\le \frac{1}{3\cos^2(\pi/4)} \tan\frac{\pi}{4}\, x^3 = \frac{2}{3}x^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

1) Wegen $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k!}{(k+1)!}\frac{b^{(k+1)^2}}{b^{k^2}} = \frac{1}{k+1}b^{2k+1} \to \infty$ konvergiert die Reihe in ganz $\mathbb{R}$.

2) Wegen $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^5 5^k}{(k+1)^5 5^{k+1}} = \frac{1}{5}\left(\frac{k}{k+1}\right)^5 \to \frac{1}{5}$ ist der Konvergenzradius $\varrho = \frac{1}{5}$.

3) Wegen $\frac{1}{1+k} = \frac{1/k}{1+1/k} \le \ln(1+\frac{1}{k}) \le \frac{1}{k}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$, also $\varrho = 1$.

4) Wegen $\sqrt[k]{|a_k|} \to e$ ist $\varrho = 1/e$.

Aufgabe 5

a)

Nach der Formel für das Interpolationsrestglied ist

$$R(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)| \quad \text{mit } M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Hier ist $f^{(n+1)}(x) = f'''(x)$. Man erhält

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\tan^2 x\\
f''(x) &= 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan^3 x + 2\tan x\\
f'''(x) &= 6\tan^2 x(1+\tan^2 x) + 2(1+\tan^2 x) = 6\tan^4 x + 8\tan^2 x + 2\\
f^{(4)}(x) &= 24\tan^3 x(1+\tan^2 x) + 16\tan x(1+\tan^2 x) \ge 0 \quad \text{in } [0,\pi/4]
\end{aligned}$$

Wegen f''' monoton wachsend ist $M_{n+1} = |f'''(\pi/4)| = 16$. Somit ist

$$R(x) = |\tan x - p(x)| \le \frac{16}{6}|(x(x-\pi/6)(x-\pi/4)|$$

Für $x = 0.4$ hat man

$$R(0.4) \le \frac{8}{3}|0.4(0.4-\pi/6)(0.4-\pi/4)| \le 0.12702$$

b)
Für das Interpolationspolynom erhält man mit Newton

x_k	y_k		
0	0		
		$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$	
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$		$\frac{24(2-\sqrt{3})}{\pi^2}$
		$\frac{12-4\sqrt{3}}{\pi}$	
$\pi/4$	1		

$$p(x) = \ldots\ldots = \frac{24}{\pi^2}(2-\sqrt{3})x^2 + \frac{2}{\pi}(3\sqrt{3}-4)x$$

Für den wahren Fehler $R(0.4)$ erhält man per Taschenrechner

$$R(0.4) = |\tan(0.4) - p(0.4)| = 0.0139\ ,$$

eine Bestätigung also, daß die Restgliedabschätzung einigermaßen grob ist.