Übungsblatt 4
Aufgabe 1

Zu zeigen: $\phi(x) = \pi + \arctan(x)$ bildet das Intervall [4;5] in sich selbst ab.
$\phi(x)$ ist eine stetige, monton wachsende, Funktion. Die Intervallgrenzen geben somit Aufschluss über die Werte, die $\phi(x)$ annehmen kann.
Da $\phi(4) \approx 4{,}46$ und $\phi(5) \approx 4{,}52$ gilt, bildet die Funktion das Intervall in sich selbst ab.
(Die kleinere Grenze wurde ab-, die größere Grenze aufgerundet!)

Zu zeigen: Die Abbildung stellt eine Kontraktion dar.
Der Betrag der ersten Ableitung von $\phi(x)$ ist: $|\phi'(x)| = |\frac{1}{1+x^2}| = \frac{1}{1+x^2}$

Im Bereich [4;5] wird das Supremum von $|\phi'(x)|$ an der Stelle 4 angenommen, da $|\phi'(x)|$ in diesem Bereich monoton fällt. $|\phi(x)|$ ist gleich $\frac{1}{17}$ und ist somit kleiner als 1.
Die Abbildung hat also die Kontraktionseigenschaft.

Gegeben: $\epsilon = 10^{-5}$ (Gewünschter max. Abstand vom tatsächlichen Fixpunkt ω)
$x_0 = 5$ (als 'beliebiger' Startwert)
$x_1 = \phi(x_0) = \pi + \arctan(5) \approx 4{,}515$
$k = \sup_{x \in [4;5]} |\phi'(x)| = \frac{1}{17}$

Gesucht: Anzahl n der Iterationen, nach denen gilt: $|x_n - \omega| \leq 10^{-5} = \epsilon$

$$|x_n - \omega| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{1}{17}\right)^n}{1-\frac{1}{17}} \cdot |4{,}515-5| \leq 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{17}\right)^n \cdot 0{,}485 \leq \frac{16}{17} \cdot 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{17}\right)^n \leq 1{,}9405 \cdot 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{17}}\left(\left(\frac{1}{17}\right)^n\right) \geq \log_{\frac{1}{17}}(1{,}9405 \cdot 10^{-5})$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(1{,}9405 \cdot 10^{-5})}{\ln(\frac{1}{17})}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq 3{,}83$$

Unter diesen Voraussetzungen erreicht man also ab der 4. Iterationen mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit, evtl. aber auch bereits früher.

Aufgabe 2

a)

(i) Zu zeigen: $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin(x)$ bildet das Intervall [0; 1] in sich selbst ab.

Die erste Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{1}{5}\cos(x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$$

Es existiert kein $x \in [0;1]$, sodass $\cos(x) = 0 \Rightarrow$ Extrema liegen an den Rändern von [0;1]

$$f(0) = 0{,}8 \qquad\qquad f(1) \approx 0{,}968295$$

Die Funktion ist im Intervall [0;1] also stetig und monoton steigend.
Die Funktion f ist somit selbstabbildend, da das Intervall [0,8; 0,97] Teil von [0; 1] ist.

(ii) Zu zeigen: f ist kontrahierend.

Der Betrag der ersten Ableitung lautet: $|f'(x)| = |\frac{1}{5}\cos(x)| \underbrace{=}_{x \in [0;1]} \frac{1}{5}\cos(x)$

Da f' im Intervall [0;1] monoton fallend verläuft, ist das Supremum des Betrags von f'(x):

$$\sup_{x \in [0;1]} |f'(x)| = |f'(0)| = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Da dies kleiner 1 ist, ist die Funktion f kontrahierend im Intervall [0;1]

b)

Gegeben: $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = f(x_0) = \frac{4}{5}$$

$$k = \sup_{x \in [0;1]} |f'(x)| = \frac{1}{5}$$

$|x_n - \omega| \leq 10^{-6} = \epsilon$ (gewünschter maxmialer Abstand vom Fixpunkt ω)

A-priori-Abschätzung: $|x_n - \omega| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \leq \epsilon$

$$\Rightarrow \quad \frac{0{,}2^n}{1-0{,}2} \cdot |0{,}8-0| \leq 10^{-6}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2^n \leq 10^{-6}$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_{0{,}2}(0{,}2^n) \geq \log_{0{,}2}(10^{-6})$$
$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(0{,}2)}$$ (Statt ln ist auch jeder andere Logarithmus möglich)
$$\Leftrightarrow \quad n \geq 8{,}58406$$

Die Genauigkeit wird also spätestens ab der 9. Iteration erreicht.

c)

$$g(x) = x - f(x) = x - \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin(x)$$
$$g'(x) = 1 + \frac{1}{5}\cos(x)$$

Iterationsvorschrift Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin(x_n)}{1 + \frac{1}{5}\cos(x_n)}$$

$x_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}78539816$

$x_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin(\frac{\pi}{4})}{1 + \frac{1}{5}\cos(\frac{\pi}{4})} \approx 0{,}67429150$

$x_2 \approx 0{,}67501773$

$x_3 \approx 0{,}67501776$

Aufgabe 3

Behauptung: $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} - x$ hat genau eine Nullstelle. Mit anderen Worten: $\phi(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$ hat *genau* einen Fixpunkt, denn:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} - x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} = x \\ \Leftrightarrow \quad & \phi(x) = x \end{aligned}$$

Beweis: $\phi'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ ist definiert für $x \in \mathbb{R}^+$ und nimmt dort lediglich Werte größer 0 an.

Dies bedeutet, dass $\phi(x)$ in ganz $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend ist. Der größte und der kleinste Funktionswert wird im Intervall [2; 3] also an den beiden Intervallgrenzen angenommen:

$$\phi(2) \approx 2{,}056 \qquad\qquad \phi(3) \approx 2{,}827$$

Die erste Bedingung für einen Fixpunkt, nämlich dass $\phi(x)$ selbstabbildend sein soll, ist hiermit also gegeben. Um die Kontraktionseigenschaft zu überprüfen, wird die zweite Ableitung gebildet:

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\frac{1}{8}x^{-3/2} \cdot e^{(\sqrt{x})} + \frac{1}{8}x^{-1} \cdot e^{(\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{x^3}} \cdot (\sqrt{x} - 1) \cdot e^{(\sqrt{x})} \end{aligned}$$

Wie zuvor nimmt auch die zweite Ableitung in ihrem Definitionsbereich nur positive Werte an. Das bedeutet, dass sich das Supremum von $|\phi'(x)|$ am rechten Intervallrand befinden muss:

$$\sup_{x \in [2;3]} |\phi'(x)| = |\phi'(3)| \approx 0{,}8159$$

Dies ist kleiner als 1, womit auch die Kontraktionseigenschaft gegeben ist. Damit existiert genau ein Fixpunkt der Selbstabbildung $\phi(x)$, und somit genau eine Nullstelle der Funktion $f(x)$.

Gesucht: Anzahl n der Fixpunkt-Iterationen, sodass der Abstand höchstens $\epsilon = 10^{-2}$ beträgt.
Gegeben: $\epsilon = 10^{-2}$ (gewünschter maximaler Abstand vom Fixpunkt ω)
$k = \sup_{x \in [2;3]} |\phi'(x)| \approx 0{,}8159$
$x_0 = 2$ (als 'beliebiger' Startwert)
$x_1 = \phi(x_0) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}} \approx 2{,}057$

A-priori-Abschätzung:

$$|x_n - \omega| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0{,}8159^n}{1-0{,}8159} \cdot |2{,}057-2| \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}8159^n}{0{,}1841} \cdot 0{,}057 \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}8159^n}{0{,}1841} \cdot 0{,}057 \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}8159^n \leq 0{,}0325$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{0{,}8159}(0{,}8159^n) \geq \log_{0{,}8159}(0{,}0325)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0{,}0325)}{\ln(0{,}8159)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq 16{,}83$$

Ab der 17. Iteration ist die gewünschte Genauigkeit also spätestens erreicht.

Bisektionsverfahren: Es ist bekannt, dass sich die Nullstelle von f(x) im Intervall [2; 3] befindet.
Gegeben: $f(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} - x$
$a_0 = 2$ (linke Intervallgrenze)
$b_0 = 3$ (rechte Intervallgrenze)

1. Schritt:

$$f(a_0) \approx 0{,}0566 \qquad f(b_0) \approx -0{,}1739 \qquad f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \approx -0{,}0698$$

$\Rightarrow a_1 := a_0 = 2 \quad b_1 := \frac{a_0+b_0}{2} = 2{,}5$ (da rechte Grenze gleiches Vorzeichen hat)

2. Schritt:

$$f(a_1) \approx 0{,}0566 \qquad f(b_1) \approx -0{,}0698 \qquad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \approx -0{,}0092$$

$\Rightarrow a_2 := a_1 = 2 \quad b_2 := \frac{a_1+b_1}{2} = 2{,}25$ (da rechte Grenze gleiches Vorzeichen hat)

3. Schritt:

$$f(a_2) \approx 0{,}0566 \qquad f(b_2) \approx -0{,}0092 \qquad f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \approx 0{,}0231$$

$$\Rightarrow a_3 := \frac{a_2+b_2}{2} = 2{,}125 \quad b_3 := b_2 = 2{,}25 \quad \text{(da linke Grenze gleiches Vorzeichen hat)}$$

4. Schritt:

$$f(a_3) \approx 0{,}0231 \qquad f(b_3) \approx -0{,}0092 \qquad f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) \approx 0{,}0068$$

$$\Rightarrow a_4 := \frac{a_3+b_3}{2} = 2{,}1875 \quad b_4 := b_3 = 2{,}25 \quad \text{(da linke Grenze gleiches Vorzeichen hat)}$$

5. Schritt:

$$f(a_4) \approx 0{,}0068 \qquad f(b_4) \approx -0{,}0092 \qquad f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) \approx -0{,}0012$$

$$\Rightarrow a_5 := a_4 = 2{,}1875 \quad b_5 := \frac{a_4+b_4}{2} = 2{,}21875 \quad \text{(da rechte Grenze gleiches Vorzeichen hat)}$$

Die Nullstelle liegt also im Intervall [2,1875; 2,21875].

Aufgabe 4

Gegeben: Gleichung $1+\xi^2=e^{2\xi-2}$
Gesucht: Fixpunktiteration der Form $x_{k+1}=\phi(x_k)$, die die Gleichung löst (x ist in diesem Fall ξ).

$$\begin{aligned}
& 1+\xi^2 = e^{2\xi-2} \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(1+\xi^2) = \ln(e^{2\xi-2}) \quad \text{(da 1+ } \xi^2 \text{ immer echt größer 0 ist)} \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(1+\xi^2) = 2\xi-2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\xi = \ln(1+\xi^2)+2 \\
\Leftrightarrow \quad & \xi = \frac{1}{2}\ln(1+\xi^2)+1
\end{aligned}$$

$\phi(\xi)$ lautet somit: $\phi(\xi) = \frac{1}{2}\ln(1+\xi^2)+1$

<u>Hinweis:</u> obige Gleichung nach ξ aufzulösen, indem man die Wurzel aus ξ^2 zieht, ξ auf beiden Seiten der Gleichung addiert, oder auf beiden Seiten durch ξ teilt, führt nicht zum Ziel, da hierbei entweder der Definitionsbereich eingeschränkt wird, oder die geforderte Kontraktionseigenschaft nicht mehr gegeben ist.

Die Iteration sieht damit wie folgt aus:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\ln(1+x_k^2)+1$$

Die Funktion $\phi(x)$ ist offensichtlich eine Selbstabbildung, da sie von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet.
Des Weiteren ist die Funktion $\phi(x)$ kontrahierend:

$$\phi'(x) = \frac{2x}{2+2x^2}$$

$\phi'(x)$ ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt, hat keine Definitionslücken und geht im Unendlichen gegen 0. Das Supremum von $|\phi'(x)|$ ist daher gleich dem Maximum von $\phi'(x)$:

$$\phi''(x) = \frac{4-4x^2}{(2+2x^2)^2}$$

$$\phi''(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4-4x^2}{(2+2x^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad (x=-1) \vee (x=1)$$

$$\phi'(-1) = -\frac{1}{2} \qquad \phi'(1) = \frac{1}{2}$$

Das Supremum von $|\phi(x)|$ lautet also $\frac{1}{2}$ und ist damit kleiner 1.

Mit dem Startwert $x_0=0$ erhält man $x_1 = \phi(x_0) = \frac{1}{2}\ln(1+0)+1 = 1$.

Weiterhin gegeben ist k $= \sup|\phi'(x)| = \frac{1}{2}$ und $|x_n-\omega| = 10^{-3}$.

Die A-priori-Fehlerabschätzung lautet also:

$$\begin{aligned} & 10^{-3} \leq \frac{0{,}5^n}{1-0{,}5} \cdot |1-0| \\ \Leftrightarrow \quad & 0{,}5 \cdot 10^{-3} \leq 0{,}5^n \\ \Leftrightarrow \quad & \log_{0{,}5}(0{,}5^n) \geq \log_{0{,}5}(0{,}5 \cdot 10^{-3}) \\ \Leftrightarrow \quad & n \geq \frac{\ln(0{,}5 \cdot 10^{-3})}{\ln(0{,}5)} \\ \Leftrightarrow \quad & n \geq 10{,}97 \end{aligned}$$

Es sind also 11 Iterationen nötig.

Aufgabe 5

a)
Sei $f(x) = 2x-2$.
$f(x)$ erfüllt wegen $f'(x) = 2 > 1$ in ganz $\mathbb{R}$ die vorausgesetzte Eigenschaft.
Sei weiterhin $a = 0$ und $b = 4$.
Wie leicht zu sehen ist, liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} & x = f(x) \\ \Rightarrow \quad & x = 2x-2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 \end{aligned}$$

den Fixpunkt $x_* = 2 \in [0;4]$. Eine Funktion ohne Kontraktionseigenschaft kann also dennoch einen Fixpunkt besitzen.

b)
Wie im Skript unter Satz 2.2 im Punkt *Beweisidee* gezeigt, gilt:

$$|x_{n+1}-x_n| \leq k^n \cdot |x_1-x_0|$$

Lässt man n unter der Bedingung $x_0 \neq x_1$ gegen unendlich laufen, so führt der Term k^n dazu, dass die rechte Seite der Ungleichung niemals kleiner wird, wenn $k \geq 1$ gilt.
Die Abstände werden zwischen den Iterationen nicht kleiner, und das Verfahren kann somit nicht konvergieren.

Gilt allerdings $x_0 = x_1$, also ist der Startwert gleich dem Fixpunkt, so steht in obiger Gleichung auf der rechten Seite der Wert 0.
Unter dieser Bedingung konvergiert das Verfahren auch bei $k \geq 1$ gegen den bereits bekannten Fixpunkt.