

MATHEMATIK 3 PI-2 WS 2010/11

4. Übungsblatt

Nullstellen-Bestimmung: Fixpunktsatz, Fixpunkt-Iteration und Newton-Verfahren; Bisektionsverfahren.

Aufgabe 1

Eine Lösung der Gleichung $x = \tan x$ im Intervall $(0; 2\pi)$ kann ermittelt werden, wenn man die Gleichung $x = \arctan x + \pi$ löst. Die Lösung ist im Intervall $[4; 5]$ zu erwarten.

Untersuchen Sie die Banach-Iteration für diese Gleichung, d.h.: Zeigen Sie, daß $\phi(x) = \pi + \arctan x$ das Intervall $[4; 5]$ in sich abbildet und daß diese Abbildung eine Kontraktion ist.

Schätzen Sie damit ab, wieviele Folgenglieder zu berechnen sind, damit

$$|x_n - \omega| < 10^{-5}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \sin x$.

- a) Zeigen Sie, daß es im Intervall $[\pi/4; \pi/2]$ genau eine Lösung der Gleichung $x = f(x)$ gibt indem Sie
 - (i) überprüfen, daß f das Intervall $[0; 1]$ in sich selbst abbildet und
 - (ii) nachweisen, das f kontrahierend ist.
- b) Wieviele Iterationsschritte sind, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, laut a-priori-Abschätzung höchstens nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-6}$ zu approximieren?
- c) Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung der Funktion $g(x) = x - f(x)$ auf und berechnen Sie, beginnend mit dem Startwert $x_0 = \pi/4$, die erste drei Folgenglieder.

Aufgabe 3

Sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} - x$ gegeben.

Untersuche, ob diese Funktion auf dem Intervall $[2; 3]$ Nullstellen hat. Falls ja, wieviel? Beweis!

Sollte es nur eine Nullstelle auf dem Intervall geben, wieviele Iterationen sind es nach Satz 2.3 nötig (falls das Verfahren anwendbar ist: überprüfe die Voraussetzungen!), um diese mit der Genauigkeit 10^{-2} zu bestimmen?

Führe die erste 5 Schritte des Bisektionsverfahrens aus.

Aufgabe 4

Die Gleichung

$$1 + \xi^2 = e^{2\xi-2}$$

soll gelöst werden. Geben Sie eine Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ an, die unabhängig vom gewählten Startpunkt x_0 gegen die Lösung der Gleichung konvergiert.

Wählen Sie als Startwert $x_0 = 0$ und geben Sie an, wieviele Iterationen Sie höchstens benötigen, um die gesuchte Lösung ξ auf 3 Nachkommastellen genau zu berechnen.

Aufgabe 5

Sei f auf dem Intervall $[a; b]$ eine stetige differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung (d.h. $f \in C^1[a; b]$). Weiter besitze f die Eigenschaft

$$\min_{x \in [a; b]} |f'(x)| > 1.$$

- Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels, das eine solche Funktion einen Fixpunkt $x_* \in [a; b]$ besitzen kann.
- Zeigen Sie, daß bei Funktionen mit der obigen Eigenschaft die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert x_0 , der kein Fixpunkt ist, divergiert.