Übungsaufgaben „Mathematik 3“ MST

Blatt 2 Differentialgleichungen

Prof. Dr. B.Grabowski

Aufgabe 1)

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind separabel?
Lösen Sie die separablen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der Variablen.
Führen Sie die nichtseparablen Differentialgleichungen durch eine geeignete Substitution in separable über und lösen Sie sie dann durch Trennung der Variablen.

a) $y' = (1-y)^2$
b) $y' = (x+y+1)^2$ (Hinweis : Subst.: u=x+y+1)
c) $xy' = y + 4x$ (Hinweis : Subst.: u=y/x)
d) $y' - xy = 0$

Aufgabe 2)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und AWP durch
T.d.V und die Methode der Variation der Konstanten (V.d.K)
a) $y' + 2y = e^{-x}$, y(0)=0
b) $3y' + 2y = x$
c) $y' + 2y = e^{-2x}$

Aufgabe 3)

Geben Sie jeweils mindestens eine Lösung folgender Differentialgleichung an :

a) $4y' = y$ b) $4y' = -3y$ c) $3y' + 2y = \sin(x)$ d) $3y' + 2y = e^x$

Lösungshinweis: Überlegen Sie sich zuerst, von welchem Typ die Lösungsfunktion y(x) sein könnte (zB. Typ Exponentialfunktion: $y(x) = ae^{bx}$, oder Polynom $y(x)=ax+b$ oder Schwingung $y(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$) , so dass die linke Seite und die rechte Seite der Differentialgleichung vom Typ her übereinstimmen.
Bestimmen Sie anschließend die unbekannten Parameter a,b Ihres gewählten Ansatzes (Typs) für y(x), indem Sie y(x) einfach in die Differentialgleichung einsetzen und schauen, für welche Werte von a,b die Differentialgleichung erfüllt ist!

Aufgabe 4)

Geben Sie **eine** spezielle Lösung der folgenden Dgl. an!
Überlegen Sie sich dazu zunächst, welchen Typ diese spezielle Lösung hat (Polynom, Schwingung, e-Funktion), machen Sie dazu einen entsprechenden parametrischen Ansatz und bestimmen Sie die Parameter durch Einsetzen des Ansatzes in die Dgl. !

a) $2y' - y = x$ b) $2y' - y = e^{0.5x}$ c) $2y' - y = x + e^{0.5x}$

Aufgabe 5)

Zerlegungssatz: Die allgemeine Lösung $y_{inhom}(x)$ der linearen inhomogenen Dgl. 1. Ordnung ay' + by = f(x) hat folgende Gestalt:
$y_{inhom}(x) = y_p(x) + y_{hom}(x)$, wobei $y_p(x)$ eine spezielle Lösung der inhomog. Dgl. und $y_{hom}(x)$ die allgemeine Lösung der zug. homogenen Dgl: ay' + by =0 ist.

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und AWP durch Anwendung des Zerlegungssatzes:
(D.h., suchen Sie eine spezielle Lösung und berechnen Sie die allg. Lösung der homog. Dgl.)

a) $y'+2y = e^{-x}$, y(0)=0 b) 2y' - y = x + $e^{0.5x}$ c) $y'+2y = 1$ + sin(x)

Aufgabe 6)

Durch die Differentialgleichung erster Ordnung $m\dot{v} + kv = mg$ wird die Sinkgeschwindigkeit v=v(t) eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit beschrieben (k:Reibungsfaktor, g:Erdbeschleunigung).

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl..
b) Wie lautet die spezielle Lösung für den Anfangswert v(0)=vo ?
c) Welche Geschwindigkeit v_{max} kann das Teilchen maximal erreichen?
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Geschwindigkeitskurve v(t) für das Anfangswertproblem v(0)=vo.

Aufgabe 7)

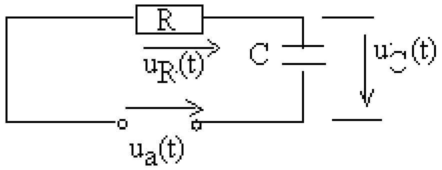
Ein Körper besitze zur Zeit $t = 0$ die Temperatur T_0 und werde in der Folgezeit durch vorbeiströmende Luft der konstanten Temperatur T_L gekühlt ($T_L < T_0$). Der Abkühlungsprozess wird dabei nach Newton durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L) \qquad (a > 0)$$

beschrieben (a: Konstante). Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Körpertemperatur T für den Anfangswert $T(0) = T_0$ und skizzieren Sie die Temperaturkurve . Gegen welchen Endwert strebt die Körpertemperatur?

Aufgabe 8)

Der Spannungsverlauf $u_c(t)$ am Kondensator im in der Skizze dargestellten Tiefpass lässt sich durch folgende Differentialgleichung beschreiben: $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u_a(t)$



Lösen Sie die Dgl nach $u_C(t)$ für folgendes Anfangswertproblem:
Der Kondensator ist zur Zeit t=0 aufgeladen: $u_C(0)$ = Uo und es wird eine konstante Spannung angelegt: $u_a(t)$ = u.
Skizzieren Sie den Verlauf der Spannungskurve $u_C(t)$.