Angewandte Mathematik
Ing.-Wiss., HTWdS
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Musterlosung zum Übungsblatt 'Numerische Integration'

Aufgabe 1

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel

$$S(f) = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an:

$$I_1 = \int_{-1}^{1}(x^3 + 2x^2 + 1)dx,$$

$$I_2 = \int_{-a}^{a} xe^{x^2}dx, \quad (a > 0).$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.

Lösung:

1. $$I_1 = \int_{-1}^{1}(x^3 + 2x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$$

   $$S_1 = \frac{1}{3}f(-1) + 4f(0) + f(1) = \frac{10}{3} = I_1$$

   Klar, da nach Konstruktion der Simpson-Regel Polynome vom Grad ≤ 3 exakt integriert werden.

2. Integrationsbereich symmetrisch um 0, Integrand $xe^(x^2)$ punktsymmetrisch zu 0

   $$\Rightarrow I_2 = \int_{-a}^{a} xe^{x^2}dx = 0 \ \ \forall a > 0.$$

   $$S_2 = \frac{2a}{6}(f(-a) + 4f(0) + f(a)) =$$

   $$S = \frac{2a}{6}(-f(a) + 4f(0) + f(a)) = \frac{4a}{3}f(0) = 0$$

   Daß $S_2 = I_2$ liegt an den Symmetrien und f(0)=0.

Aufgabe 2

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall. Leiten Sie die Simpson-Regel auf der folgende Art und Weise her:*

Zu bestimmen sind Gewichte $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ *derart, daß die Quadraturformel*

$$S(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b)$$

das Integral $\int_a^b P(x)dx$ *für alle Polynome* P *zweites Grades exakt berechnet.*

Lösung:

Simpson-Regel:

$$S(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (b-a)\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}$$

mit $t = \frac{x-a}{b-a}$ (also es genugt, das Intervall $[0,1]$ zu betrachten).

Es soll gelten:

$$S(t^k) = \int_0^1 t^k \mathrm{dt} = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 0,1,2$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem ist zu losen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega_0} \\ \tilde{\omega_1} \\ \tilde{\omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{\omega_i} = \frac{\omega_i}{b-a}$, $i = 0,1,2$. Gauß-Algorithmus fuhrt auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; \tilde{\omega_0} = 1/6, \; \tilde{\omega_1} = 2/3, \; \tilde{\omega_2} = 1/6$$

$$\Rightarrow \; \omega_0 = \frac{b-a}{6}, \; \omega_1 = \frac{4}{6}()b-a, \; \omega_2 = \frac{b-a}{6},$$

oder, zusammengefasst:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Aufgabe 3

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^2([a,b])$ (f ist eine zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a,b]$, d.h. auf $[a,b]$ existieren stetige f' und f'').

Leiten Sie für die Trapezregel

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

mit Hilfe von Taylor-Formel für f an der Stelle $x \in [a,b]$ die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(x)) \right| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|(b-a)^3$$

ab.

Lösung:

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + 1/2 f''(\xi_a)(a-x)^2$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + 1/2 f''(\xi_b)(b-x)^2$$

$$\xi_a = \xi_a(x) \in [a,x], \quad \xi_b = \xi_b(x) \in [x,b]$$

$$\to \; f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 1/4(f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)$$

Integriere von a bis b:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) =$$

$$= -\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\mathrm{dx} - \frac{1}{4}\left(\int_a^b (f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)\mathrm{dx}\right).$$

Das 1. Integral: partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\mathrm{dx} = \left[f(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\right]_a^b + \int_a^b f(x)\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)) + \int_a^b f(x)\mathrm{dx}.$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a))\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\left|\int_a^b (f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)\mathrm{dx}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{8} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)| \int_a^b ((a-x)^2) + (b-x)^2)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{8} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)| \left[-\frac{1}{3}(a-x)^3 - \frac{1}{3}(b-x)^3 \right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3 \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$