Übungsaufgaben „Differentialgleichungen 2. Ordnung“

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung :

Aufgabe 1

Def.: Zwei Funktionen b1(x) und b2(x) heißen linear abhängig, falls gilt:
$\exists \lambda \in R : b1(x) = \lambda b2(x) \quad \forall x \in$ R.
Im Umkehrschluss gilt:
Zwei Funktionen b1(x) und b2(x) heißen **linear unabhängig**, falls
aus $\lambda_1 b1(x) + \lambda_2 b2(x) = 0 \; \forall x \in R$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Satz.: Die **allgemeine Lösung** $y_{\text{hom}}(x)$ der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung a y'' + by' +cy = 0 hat die Gestalt: $y_{\text{hom}}(x) = \lambda_1 b1(x) + \lambda_2 b2(x), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in R$.
wobei b1(x) und b2(x) 2 linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl. sind.

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $y'' - 2y' + 5y = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $b_1(x) = e^x \cos(2x)$ und $b_2(x) = e^x \sin(2x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $y'' - 2y' + 5y = 0$ sind!

b) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' + 5y = 0$?

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $b(x) = e^{(\alpha + j\beta)x}$

Aufgabe 3

Zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen b1(x) und b2(x) einer Differentialgleichung 2. Ordnung $ay'' + by' + cy = 0$ erhalten wir wie folgt: (Nachweis, dass es linear unabhängige Lösungen sind führen wir in der nächsten Vorlesung durch!).

1) Wir stellen die charakteristische Gleichung zur Dgl. auf: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

und lösen diese: $\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$

2) Bei der Lösung ergeben sich 3 Fälle. In Abhängigkeit vom jeweiligen Fall ergeben sich die Basislösungen wie folgt:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \alpha \pm \sqrt{\beta}$$

Fall	Basis
β>0 (2 verschiedene reelle Nullstellen λ_1, λ_2)	$b1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad b2(x) = e^{\lambda_2 x}$
β<0 (2 konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\sqrt{\mid \beta \mid}$)	$b1(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 x}) = e^{\alpha x}\cos(\mid \beta \mid x)$, $b2(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 x}) = e^{\alpha x}\sin(\mid \beta \mid x)$
β=0 (1 doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)	$b1(x) = e^{\lambda x}, \quad b2(x) = xe^{\lambda x}$

Lösen Sie mit Hilfe dieser Tabelle folgende homogene Differentialgleichungen:

a) $y''+6y'+10y = 0$,
b) y''+2y'-3y = 0
c) y''+2y'= 0
d) y''-2y'+ y = 0

Aufgabe 4
Ein biegsames Seil der Länge l und der Masse m gleite *reibungsfrei* über eine Tischkante. Ist x=x(t) die Länge des überhängenden Seiles zur Zeit t, so ist die auf das Seil einwirkende Kraft gleich dem Gewicht des überhängenden Seiles, also $\frac{x}{l}mg$ (g=9,81 (Erdbeschleunigung)).
Die Differentialgleichung der Bewegung lautet somit:

$$m\ddot{x} = \frac{x}{l}mg \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} - \frac{x}{l}g = 0$$

a) Lösen Sie diese Differentialgleichung für ein 1,50 m langes Seil, das zu Beginn (t=0) zur Hälfte überhängt und sich aus der Ruhe heraus in Bewegung setzt.
b) Nach welcher Zeit ist das Seil abgerutscht?

Aufgabe 5
(Stoßdämpferproblem)
a) Untersuchen Sie mit Hilfe der Schwingungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

die Bewegung (x(t) = Ort zur Zeit t in Meter m) einer Masse von m= 20 kg, die mit einer elastischen Feder der Federkonstanten c=10500 N/m verbunden ist, wenn das System den Dämpfungsfaktor b=1000kg/s besitzt.
Dabei werde die Masse zu Beginn der Bewegung (t=0) in der Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit v0= 3 m/s angestoßen (x(0) = 0, $\dot{x}(0) = 3m/s$).

b) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Schwingung.