Komplexe Zahlen: Kurze Wiederholung

Dipl.-Math. Dimitri Ovrutskiy
HTW des Saarlandes

4. November 2010

Sei $j = \sqrt{-1}$ die komplexe Einheit. Die Zahl wird oft auch als i bezeichnet.

Rechnen in $\mathbb{C}$

Aufgabe 1 *Für $z_1 = 2 - 2j$ und $z_2 = 1,5e^{1,5\pi j}$ berechne*

$$-\frac{z_1}{z_2^*} \quad \textit{und} \quad z_1 - z_2^*$$

und stelle die Ergebnisse jeweils in NF und EF dar.

Bemerkung 2 ***Formel von Moivre zur berechnung der komplexen Wurzeln:***
Sei $z = re^{j\phi}$ gegebene komplexe Zahl. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$ gibt es genau n verschiedene $\sqrt[n]{z}$, und diese werden wie folgt bestimmt:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + j\sin(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n})) =$$

$$= \sqrt[n]{r}e^{j(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}e^{j\frac{\phi}{n}}e^{jk\frac{2\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Aufgabe 3 *Berechne alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des Polynoms $P(z) = z^4+81$. Zeichne die Lösungen als Zeiger!*

Überlagerung von Schwingungen

Bemerkung 4 ***Addition (Überlagerung) von Schwingungen:***
Seien zwei Sinus-Schwingungen mit der gleichen Frequenz gegeben: $y_1(t) = A_1\sin(\omega t+\phi_1)$ und $y_2(t) = A_2\sin(\omega t+\phi_2)$. Gesucht wird die resultierende Schwingung $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.
Wie geht man vor?
Der Fall mit $\phi_1 = \phi_2$ läßt sich direkt berechnen. Im Allgemeinen aber kommen die komplexe Zahlen zum Einsatz.

Man merkt, daß

$y(t) = A\sin(\omega t+\phi) = Im[A(\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)] = Im[Ae^{j(\omega t+\phi)}],$

wobei $j = \sqrt{-1}$ *die komplexe Einheit ist.*

Also

$$y_1(t) = Im[z_1(t)] := Im[A_1 e^{j(\omega_1 t+\phi_1)}] = Im[(A_1 e^{j\phi_1})e^{i\omega t}],$$
$$y_2(t) = Im[z_2(t)] := Im[A_2 e^{j(\omega_2 t+\phi_2)}] = Im[(A_2 e^{j\phi_2})e^{i\omega t}]$$

und

$y(t) = y_1(t)+y_2(t) = Im[z_1(t)+z_2(t)] =: Im[z(t)] = Im[(A_1e^{j\phi_1}+A_2e^{j\phi_2})e^{j\omega t}].$

Anderseits (Tafelbild: Interpretation einer Sin-Schwingung als Zeigerumdrehung in der komplexen Ebene $\rightarrow$ *Frequenzerhaltung (Diese folgt direkt aus der obigen Formel!))*

$$y(t) = Bsin(\omega t+\psi) = Im[(Be^{j\psi})e^{j\omega t}].$$

Man muß nun die Amplitude B *und die Phase* ψ *finden:*

$$(Be^{j\psi})e^{j\omega t} = (A_1e^{j\phi_1}+A_2e^{j\phi_2})e^{j\omega t},$$

also gilt

$$Be^{j\psi} = A_1e^{j\phi_1}+A_2e^{j\phi_2}.$$

Dann (unter Verwendung der trigonometrischen und eulerischen Formen einer komplexen Zahl und geometrischen Überlegungen in der komplexen Ebene (Satz von Pythagoras)) gilt:

$$B = \sqrt{(A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2)^2+(A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2)^2},$$
$$\tilde{\psi} = arctan\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}.$$

Bei Feststellung von ψ *muß man den richtigen Quadrant beachten!*

Aufgabe 5 *Berechne die resultierende Schwingung, die bei der Überlagerung von* $u_1 = 2\sin(3t-\frac{\pi}{2})$ *und* $u_2 = 4\cos(3t+\frac{\pi}{4})$ *entsteht, und zeichne das Ergebnis.*

Aufgaben 6 *Berechne die Überlagerung von folgenden Schwingungen:*

1. $y_1 = -4\sin(2,45t+0,75\pi),\ y_2 = 2,5\sin(2,45t-0,125\pi)$
2. $y_1 = 6,3\cos(220t+\pi),\ y_2 = 5,6\sin(220t-0,6\pi)$
3. $y_1 = 0,5\cos(12t+\frac{5}{6}\pi),\ y_2 = 5,6\sin(12t-\frac{2}{3}\pi)$

Bemerkung 7 $B\sin(\omega t+\phi) = A_1\sin(\omega t+\phi_1)+A_2\sin(\omega t+\phi_2)$. *Dann gilt auch:*

$$B = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$$
$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2} \quad \textit{(Quadranten beachten!)}$$