

HTW DES SAARLANDES
Prof. Dr. R. Lenz
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

MATHEMATIK 3 PI-2 WS 2010/11

5. Übungsblatt

Numerische Integration.

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

mit der Simpsonschen Regel und schätzen Sie den Fehler mit der Fehlerformel zur Simpsonregel ab.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem wahren Wert des Integrals (zweimalige partielle Integration).

Berechnen Sie den Wert des Integrals mit der Newtonschen 3/8-Regel.

Aufgabe 2

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Leiten Sie die Simpson-Regel auf die folgende Art und Weise her:

Zu bestimmen sind Gewichte $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ derart, daß die Quadraturformel

$$S(f) = w_0 f(a) + w_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b)$$

das Integral $\int_a^b P(x) dx$ für alle Polynome P zweites Grades exakt berechnet.

Aufgabe 3

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^2([a, b])$ (f ist zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$, d.h. es existieren stetige f' und f'' und beide sind stetig).

Leiten Sie für die Trapezregel

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

mit Hilfe der Taylor-Formel für f an der Stelle $x \in [a, b]$ die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(f) \right| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| (b-a)^3$$

ab.

Aufgabe 4

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel

$$S(f) = (b - a) \left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an:

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^3 + 2x^2 + 1)dx,$$

$$I_2 = \int_{-a}^a xe^{x^2} dx, \quad (a > 0).$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.