Zu Aufgabe 1

Zu a)

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad (Subst.Typ:2)$$

$$\text{Subst.}: u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}du \Leftrightarrow xdu = dx$$

$$\Rightarrow ... = \int \frac{u}{x}xdu = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + C$$

Rücksubst.:

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C, C \in R.$$

Zu b)

$$\int -2te^{-t^2}dt$$

$$\text{Subst.}: u = -t^2 \Rightarrow du = -2tdt \Leftrightarrow -\frac{1}{2t}du = dt$$

$$\Rightarrow \int -2te^u du\frac{(-1)}{2t} = \int e^u du = e^u$$

Rücksubst.:

$$\Rightarrow \int -2te^{-t^2}dt = \mathrm{e}^{-t^2} + C, C \in R.$$

Zu c)

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$$

$$\text{Subst.}: u = x^4 + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{4x^3}du$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln(|u|) + C$$

Rücksubst.:

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(|x^4+1|) + C, C \in R.$$

Zu d)

$$\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx$$

$$\text{Subst.:} \quad u = \cos(x) \quad \frac{du}{-\sin(x)} = dx$$

$$... = \int \sin(x)e^u \frac{du}{-\sin(x)} = -\int e^u du = -e^u + C$$

Rücksubst.: $\int \sin(x)e^{\cos(x)}dx = e^{\cos(x)} + C, C \in R.$

Zu e) $\int \sqrt{x-2}dx$

Subst.:
u=x-2, $du = dx$

$$... = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubst.: $\int \sqrt{x-2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C, C \in R.$

Zu f) Partielle Integration: u=x, v'=sin(x) (---> u'=1, v=-cos(x))
$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$, C∈R.

Zu g)
$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

$$\text{Subst.}: u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}du \Leftrightarrow xdu = dx$$

$$\Rightarrow ... = \int \frac{\sqrt{u}}{x}xdu = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubst.:

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C, C \in R.$$

Zu h)
$$\int 1 + \frac{3x+2}{3x^2+4x-12}dx = \int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x-12}dx$$

Das Integral (2. Summand) lösen wir durch Substitution (Typ3): $u=3x^2+4x-12$

➔ Ergebnis:

$$\int 1 + \frac{3x+2}{3x^2+4x-12}dx = \int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x-12}dx = x + \frac{1}{2}\ln(|3x^2+4x-12|) + C$$ **,C∈R.**

Prof. Dr.B.Grabowski e-mail:grabowski@htw-saarland.de

Zu Aufgabe 2

Zu a) $\int \frac{1}{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|2x-3|) + C, C \in R.$ (Subst. Typ1 : u=2x-3)

Zu b) $\int \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2x-3)} + C, C \in R.$ (Subst. Typ 1: u=2x-3)

Zu c) $\int \frac{1}{(2x-3)^n}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(2x-3)^{n-1}} + C, C \in R.$ (Subst. Typ 1: u=2x-3)

Zu d) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-7}}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-7)^3} + C$ (Subst. Typ 1: u=2x-7)

Zu e) $\int \frac{2x+1}{(2x-3)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x-12}{4x^2-12x+9}\,dx + \int \frac{5}{(2x-3)^2}\,dx$

Das erste Integral der rechten Seite lösen wir durch Substitution Typ 3: $u = (2x-3)^2$

$$\int \frac{8x-12}{4x^2-12x+9}\,dx = \int \frac{1}{u}du = \ln((2x-3)^2) + C1$$

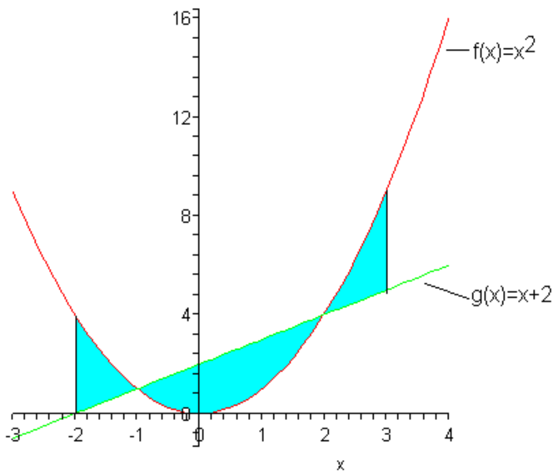
Das 2. Integral lösen wir wie in b):

$$\int \frac{5}{(2x-3)^2}\,dx = 5\,(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{(2x-3)} + C2 = \frac{-5}{2(2x-3)}.+C2$$

Demzufolge erhalten wir:

$$\int \frac{2x+1}{(2x-3)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln((2x-3)^2) - \frac{5}{2(2x-3)}.+C, C \in R.$$

Zu Aufgabe 3)



Zu berechnen ist der Flächeninhalt A = $\int_{-2}^{3} | f(x) - g(x) | dx$ der blauen Fläche.

Dazu müssen wir die Schnittpunkte der beiden Kurven berechnen, d.h. die Lösungen der quadratischen Gleichung: f(x)-g(x) = $x^2 - (x+2) = 0$.

Aus der p-q-Formel ergibt sich: x1 = -1, x2 = 2.

Daraus folgt:
$| f(x) - g(x) | = f(x) - g(x)$ für x∈[-2,-1] und x∈ [2,3]

$| f(x) - g(x) | = -f(x) + g(x)$ für x ∈ [-1,2]
und wir erhalten:

$$A = \int_{-2}^{3} | f(x) - g(x) | dx = \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{2}^{3} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x)) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx + \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2) dx + \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{2}^{3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} + 2 - 4\right] + \left[9 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{8}{3} + 2 + 4\right] + \left[-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right]$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - 3 + 8 - \frac{1}{2} = 4 + 9 - 5 - \frac{1}{3} = \frac{23}{3} = 7{,}6667$$

Zu Aufgabe 4

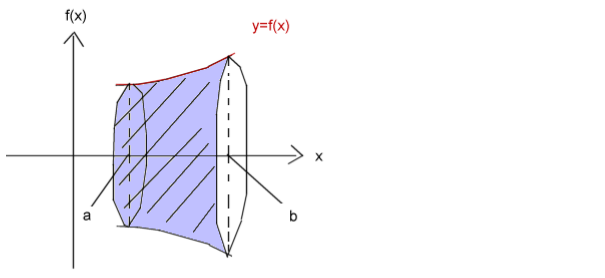
Zu a) Wird in der Übung erklärt!

Zu b) und c) Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn die Funktion
$y=\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

b) um die x-Achse rotiert wird!
c) um die y-Achse rotiert wird!

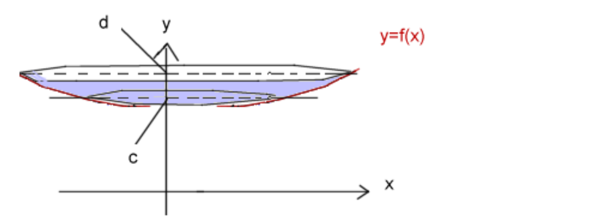
Lösung:
Das Volumen des Körpers, der bei Rotation von f(x) um die x-Achse, x $\in$ [a,b] , entsteht ist:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$



Das Volumen des Körpers, der bei Rotation von f(x) um die y-Achse, y $\in$ [c,d] , entsteht ist:

$$V_y = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 \, dy$$



Zu b) $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$

Zu c) $y = f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 = f^{-1}(y)$, c=f(0)=0 und d=f(4)=2.

$$\Rightarrow V_y = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 \, dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \frac{\pi}{5} \left[y^5 \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$