3. Das Fourier-Integral und Spektralfunktion

<u>Bisher</u>: Zerlegung einer T-periodischen Funktion in harmonische Schwingungen

<u>Jetzt</u>: Zerlegung einer <u>nicht-periodischen</u> Funktion in harm. Schw.

Idee: $(T) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$

Sei $f_T(t)$ eine T-periodische Funktion, die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt.

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j(n\omega_0)t} \quad (*)$$

Sei nun $(T) = \left[-T/2 \, ; \, +T/2\right]$

$$(1) \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \iff \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2)$$

Aus (*) mit (1), (2) folgt:

$$f_T(t) \overset{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right) \cdot e^{jn\omega_0 t} \right]$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right] e^{jn\omega_0 t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \right] \omega_0$$

Heuristiken!

$$T \to \infty$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \to \infty} d\omega$$

$$n\omega_0,\ n \in \mathbb{Z} \xrightarrow{T \to \infty} \omega$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n\omega_0) \xrightarrow{T \to \infty} \int_{\omega} h(\omega)\, d\omega$$

$f_T(t) \longrightarrow T$- periodisch

$f(t)$ nichtperiodisch
$\hat{=}$

"∞ - periodisch"

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \; e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (**)$$

Mit

$$F(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

aus (**):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Def:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

mit

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

heißt Fourier-Integral der nichtperiodischen Funktion $f(t)$

Das Paar

$\big(f(t),\ F(\omega)\big)$ wird

auch als Paar der

Fourier-Transformierten

bezeichnet.

$F(\omega)$ heißt Amplitude-

funktion. (komplex)

$F(\omega)$ hat die

Euler-Form:

$$|F(\omega)|\, e^{j\cdot\varphi(\omega)}$$

$|F(\omega)|$ heißt Amplituden-spektrum, $\varphi(\omega)$ heißt Phasenspektrum.

3.1. Eigenschaften des FI (Fourier-Integral)

Nicht jede $f(t)$ kann man als FI darstellen, sondern nur die, für die $F(\omega)$ existiert, d.h.

$$|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Es gibt einige Existenzsätze (entsprechen den D1, D2 im periodischen Fall), z.B.:

Satz: Ist $f(t)$ absolut integrierbar, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty,$$

so gilt:

$$|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(Ohne Beweis)

Zusammenfassung der Formeln für FR und FI

Was	FR	FI
Voraussetzungen an $f(t)$	a) $f(t)$ ist T-periodisch, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ b) Dirichlet-Bed.: D1, D2	a) $f(t)$ nicht periodisch b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t)\rvert \, dt < \infty$ (absolut integrierbar)
Formel für F-Darstellung (komplex)	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ mit: $c_n e^{jn\omega_0 t}$ Schwingung mit Amplitude c_n für Frequenz $(n\omega_0)$	$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$ mit $F(\omega) e^{j\omega t}$ Schwingung mit (komplexer) Amplitude $F(\omega)$ für Frequenz ω
Komplexe Amplitude	$c_n = \lvert c_n\rvert e^{j\varphi_n}$ $\lvert c_n\rvert$ Amplitudenspektrum φ_n Phasenspektrum $c_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$	$F(\omega) = \lvert F(\omega)\rvert e^{j\varphi(\omega)}$ $\lvert F(\omega)\rvert$ Amplitudenspektrum $\varphi(\omega)$ Phasenspektrum $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt$
L		