24. 02. 2014 9 Uhr

Klausur

Komplexe Zahlen

Fourier - Reihen

Fourier- Integral u. Transformation

Lineare Filter

Laplace - Transformation

Laplace – Transformation

(Wiederholung)

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$s, \; s > k \qquad (k, +\infty)$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

$f: t \in \mathbb{R} \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ erfülle:

(V1) $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$

V2 $\lim_{t \to 0+} f(t) = f(0)$

V3: $\exists k : \left| F(s) \right| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt \right| < \infty$

$\forall s > k$

Dems : $F(s)$ existiert und die zuordnug

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$

ist $\forall s > k$ eindeutig.

Bsp 2: $f(t) = \begin{cases} t^t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

V1, V2 sind erfüllt (wurde bereits gezeigt)

V3: $t^t = e^{t \ln t}$ wächst schneller als jede Funktion $M \cdot e^{st}$ $\forall M, s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(t)}{M \cdot e^{st}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{t^t}{e^{st}} = \frac{1}{M} \left(e^t\right)^{(\ln t - s)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, dt = \infty \quad \forall s \; \forall M$$

$\Rightarrow t^t$ besitzt keine Laplace-Transformierte

(V3) ist verletzt!

<u>Folgerung (Satz):</u>

Sei f eine Funktion, die nicht schneller wächst, als eine exp-Funktion, d.h.

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}: \quad |f(t)| \le M e^{kt} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (V3^{*})}$$

Dann gilt (V3), d.h.:

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \right| < \infty$$

$$\forall s > k$$

Bew: $|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \right| \leq$

Δ-Ungl.

$$\leq \int_0^\infty \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt =$$

$$= \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt \leq$$

V3*

$$\leq \int_0^\infty M e^{kt} \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{(k-s)t}\, dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{-(s-k)t}\, dt =$$

$$= M \cdot \frac{-1}{s-k} e^{-(s-k)t} \Big|_{t=0}^{\infty} =$$

$$= -\frac{M}{s-k} \left(\lim_{t\to\infty} e^{-(s-k)t} - 1 \right) =$$

$\searrow 0$, weil $s > k$

$$= \frac{M}{s-k} < \infty, \quad \text{q.e.d.}$$

D.h. $\forall f: t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$

mit:

V1: $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$

V2: $\lim_{t \to 0+} f(t) = f(0)$

V3*: $\exists k \in \mathbb{R} \, \exists M \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{kt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

existiert $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$

und die Zuordnung

$$f(t) \circ\!\!\xrightarrow{\;\mathcal{L}\;}\!\!\bullet\; F(s)$$

ist eineindeutig (d.h.

$\forall f(t)\ \exists!\ F(s)$ und

$\forall F(s)\ \exists!\ f(t)$).

Berechnung der Laplace-Transformierten $F(s)$ für elementare Funktionen

Geg.: $f(t)$ (erfüllt V1 – V3 bzw (V1, V2, V3*))

Gesucht: $F(s)$

Elementare Funktionen:

$f(t) = t$; $f(t) = 1$;

$f(t) = e^{\alpha t}$; $f(t) = \cos t$;

$f(t) = \sin t$; u.s.w.

Für diese Fktnen wird $F(s)$ "zu Fuß" berechnet.

die Ergebnisse liegen in Tabellen vor!

$t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0 \quad t < 0$

$s \in (k, +\infty)$

$f(t)$	$F(s)$, $s > k$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$ $(k = 0)$
t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
$\sin(t)$	$\frac{1}{s^2+1}$, $s > 0$
$\cos(t)$	$\frac{s}{s^2+1}$, $s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha$
...	...

u.s.w.

s. Laplace-Tabelle 2 online

Bsp.: – Bew.:

$$f(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

(V1): erfüllt ✓

(V2): erfüllt ✓

$(V3)^*$, und somit (V3): erfüllt ✓

Laut Def.:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt$$

PI:

$$\int t\, e^{-st}\, dt$$

$$\int f \cdot g'\, dt = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dt$$

$$f = f(t), \quad g(t)$$

$$\int t\, e^{-st}\, dt \; =$$

$$t = f \qquad , \qquad f' = 1$$

$$g' = e^{-st} \qquad , \qquad g = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$= -\frac{t}{s}e^{-st} - \int \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) dt$$

$$= -\frac{t}{s}e^{-st} - \left(-\frac{1}{s}\right)^2 e^{-st} + C,$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^\infty t e^{-ts} dt =$$

$$= \left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{-1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} t e^{-st} - 0\right) -$$

$$-\frac{1}{s^2}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1\right) =$$

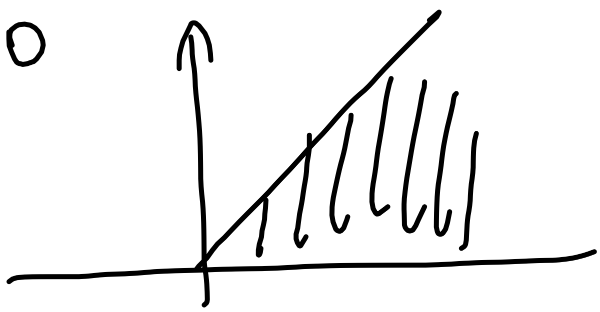
$$= -\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\left(t\,e^{-st}\right) -$$

$$-\frac{1}{s^2}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st}\right) + \frac{1}{s^2};$$

Fallunterscheidung !

$F(s)$? $\boxed{s=0}$

$$F(0) = \int_0^\infty t\,dt = \infty$$



wäre $\boxed{s<0}$:

$$\lim_{t\to\infty} t e^{-st} = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} = \infty$$

$\Rightarrow F(s) = -\infty \quad (s<0)$

$\Rightarrow$ $s \leq 0$ existiert

$F(s)$ nicht!

$\boxed{s > 0}$

$$\lim_{t \to \infty} t \cdot e^{-st} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{st}} \stackrel{\circ}{=}$$

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \quad \text{L'Hospital:}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{s e^{st}} = 0$$

$$F(s) = -\frac{1}{s}\left(0 - 0\right) -$$

$$- \frac{1}{s^2}\left(0 - 1\right) = \frac{1}{s^2}$$

$\Rightarrow$ Für $s > 0$ existiert

$F(s)$ und $\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$