Lösungen zu Übungs-Blatt „Differentialgleichungen 2. Ordnung und PBZ“

Zu Aufgabe 1)
Geben Sie jeweils mindestens eine Lösung folgender Differentialgleichung an :

$a) 3y''+2y'=3x-1$
$b) y''+y'+y=1$
$c) y''+y'+y=\sin(x)$
$d) y''+y'+y=e^x$
$e) y''+2y'-3y=e^x$
f) $3y''+2y'-y=x^2+3x-1$

Lösungshinweis: Überlegen Sie sich zuerst, von welchem Typ die Lösungsfunktion y(x) sein
könnte (zB. Typ Exponentialfunktion: $y(x) = ae^{bx}$, oder Polynom $y(x)=a_nx^n + ...+ a_1x+a_o$ einer bestimmten Ordnung n oder Schwingung y(x) = asin(x) + bcos(x)) , so dass die linke Seite (=Störfunktion) und die rechte Seite der Differentialgleichung vom Typ her übereinstimmen. Bestimmen Sie anschließend die unbekannten Parameter a,b bzw. $a_n,...,a_o$ Ihres gewählten Ansatzes (Typs) für y(x), indem Sie y(x) einfach in die Differentialgleichung einsetzen und schauen, für welche Werte von a,b bzw. $a_n,...,a_o$ die Differentialgleichung erfüllt ist!

Lösung:

Zu a)
Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = ax^2 + bx + c$.
Wir bestimmen die Parameter a,b und c durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; y_p' = 2ax + b,\; y_p'' = 2a$$

$$3y''+2y'=3x-1 \Leftrightarrow 6a+4ax+2b=3x-1 \Leftrightarrow (6a+2b)+4ax=3x-1$$
$$\Leftrightarrow 6a+2b=-1$$
$$4a=3$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}, b=-\frac{11}{4}, c\,beliebig, z.B.\ c=0$$

Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p = \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{4}x$.

Zu b)
Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = a$.
Wir bestimmen den Parameter a durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p = a \;\Rightarrow\; y_p' = y_p'' = 0$$

$y''+y'+y=1 \Leftrightarrow a=1$

Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p(x)=1$.

Zu c)
Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = a\sin(x)+b\cos(x)$.
Wir bestimmen die Parameter a und b durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :
$y_p = a\sin(x)+b\cos(x) \Rightarrow y_p' = a\cos(x)-b\sin(x), \qquad y_p'' = -a\sin(x)-b\cos(x)$

$$y''+y'+y=\sin(x) \Leftrightarrow -a\sin(x)-b\cos(x)+a\cos(x)-b\sin(x)+a\sin(x)+b\cos(x)=\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow -b\sin(x)+a\cos(x)=\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad b=-1, a=0$$

Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p = -\cos(x)$.

Zu d)
Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = ae^x$.
Wir bestimmen den Parameter a durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :
$y_p = ae^x \Rightarrow y_p' = ae^x, \qquad y_p'' = ae^x$
$$y''+y'+y=e^x \Leftrightarrow 3ae^x = e^x \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$
Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p = \frac{1}{3}e^x$.

Zu e)
Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = ae^x$.
Wir bestimmen den Parameter a durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :
$y_p = ae^x \Rightarrow y_p' = ae^x, \qquad y_p'' = ae^x$

$$y''+2y'-3y=e^x \Leftrightarrow ae^x+2ae^x-3ae^x=e^x \Leftrightarrow 0=e^x$$

Das ist ein Wiederspruch, d.h. unser Ansatz ist falsch.
Wir versuchen deshalb einen anderen Ansatz für die spezielle Lösung:
$y_p = axe^x$.
Wir bestimmen den Parameter a durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :
$y_p = axe^x \Rightarrow y_p' = ae^x + axe^x, \qquad y_p'' = 2ae^x + axe^x$

$$y''+2y'-3y=e^x \Leftrightarrow 2ae^x+axe^x+2ae^x+2axe^x-3axe^x=e^x$$
$$\Leftrightarrow 4ae^x=e^x$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$$

Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p=\frac{1}{4}xe^x$.

Zu f)

Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p=ax^2+bx+c$.

Wir bestimmen die Parameter a,b und c durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p=ax^2+bx+c \Rightarrow y_p'=2ax+b, y_p''=2a$$

$$3y''+2y'-y=x^2+3x-1 \Leftrightarrow 6a+4ax+2b-ax^2-bx-c=x^2+3x-1$$
$$\Leftrightarrow -ax^2+(4a-b)x+(6a+2b-c)=x^2+3x-1$$
$$\Leftrightarrow a=-1$$
$$4a-b=3$$
$$6a+2b-c=-1$$
$$\Leftrightarrow a=-1, b=-7, c=-19$$

Eine spezielle Lösung lautet folglich: $y_p=-x^2-7x-19$.

Zu Aufgabe 2
Zu a)

Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir einen geeigneten Ansatz: Dieser bestimmt sich aus der Störfunktion. Diese ist = x und damit eine Gerade. Wir setzen also für yp(x) auch eine Gerade an:
yp(x) = ax+b

Zur Berechnung der Unbekannten Konstanten a und b setzten wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = ax+b → yp'(x) =a und yp''(x) = 0

Wir erhalten:

yp'' + 6yp' + 10yp = x ⇔ 6a+10ax+10b = x

⇔ (6a + 10b) + 10a x = x
⇔ (6a + 10b) = 0 und 10 a = 1
⇔ $a=\frac{1}{10}, b=\frac{-6}{100}$

Also ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.:

yp (x) $= \frac{1}{10}x - \frac{6}{100}$.

Zu b)

Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz:

yp(x) = acos(5x) + bsin(5x) .

Zur Berechnung der Unbekannten Konstanten a,b setzen wir yp(x)
in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = acos(5x) + bsin(5x) → (yp)'(x) = -5asin(5x) + 5bcos(5x) und
(yp)''(x) = -25acos(5x) - 25bsin(5x)

Wir erhalten:

yp'' + 2yp' -3yp = 2sin(5x) ⇔

-25acos(5x) - 25bsin(5x) -10asin(5x) + 10bcos(5x) -3acos(5x) -3bsin(5x) = 2sin(5x)

⇔ (-25a +10b -3a) cos(5x) + (-25b -10a -3b) sin(5x) = 2sin(5x)
⇔ (-28a + 10b) = 0 und (-28b – 10a) = 2
⇔ $a = \frac{-20}{784}, b = \frac{-56}{784}$

Eine spezielle Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:
yp(x)= $-\frac{20}{784}$ cos(5x) - $\frac{56}{784}$ sin(5x)

Zu c)
Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz:

Wir müssen, damit die Funktionstypen der linken und der rechten Seite übereinstimmen, ein Polynom 2. Grades ansetzen:

yp(x) = ax^2+bx+c → yp'(x) =a x +b und yp''(x) = a

Wir erhalten:

yp'' + 2yp' = x ⇔ a+2ax + 2b = x

⇔ (a + 2b) = 0 und 2a =1

$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{-1}{4}$

Eine spezielle Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:

yp(x) = $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$,

<u>Zu d)</u>

Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz:

Wir müssen, damit die Funktionstypen der linken und der rechten Seite übereinstimmen, eine Konstante ansetzen:
yp(x) = a $\rightarrow$ yp'(x) = yp''(x) = 0

Wir erhalten:
yp'' - 2yp' + yp = 2 $\Leftrightarrow$ a=2

Eine spezielle Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:

yp(x) = 2.

Zu e) y''-2y'+ y = e^x
Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir einen geeigneten Ansatz: Dieser bestimmt sich aus der Störfunktion. Diese ist = e^x . Wir setzen also für yp(x) auch eine e-Funktion an:
yp(x) = a e^x .

Zur Berechnung der Unbekannten a setzen wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = a e^x $\rightarrow$ yp'(x) = a e^x und yp''(x) = a e^x

Wir erhalten:

y''-2y'+ y = e^x
$\Leftrightarrow$ a e^x -2 a e^x + a e^x = e^x $\Leftrightarrow$ 0 = e^x

Das ist ein Wiederspruch, denn die e-Funktion ist immer >0.
D.h., unser Ansatz funtkioniert nicht! (**Bemerkung**: Man kann zeigen, dass der Ansatz yp(x) = a e^x im Lösungsraum $y_{hom(}$x) der homogenen Dgl. enthalten ist, und damit nicht die inhomogene Dgl. lösen kann).

Wir machen einen anderen Ansatz, wir multiplizieren unseren Ansatz einfach mit x:
yp(x) = a x e^x .

Zur Berechnung der Unbekannten a setzen wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

$yp(x) = axe^x \rightarrow yp'(x) = a\,e^x + axe^x$ und $yp''(x) = 2a\,e^x + ax\,e^x$

Wir erhalten:

$y'' - 2y' + y = e^x$
$\Leftrightarrow\ 2a\,e^x + ax\,e^x - 2\,a\,e^x - 2\,ax\,e^x + axe^x = e^x \Leftrightarrow 0 = e^x$

Das ist wiederum ein Wiederspruch, denn die e-Funktion ist immer >0.
D.h., dieser Ansatz funktioniert auch nicht! (**Bemerkung**: Man kann zeigen, dass der Ansatz $yp(x) = ax\,e^x$ auch im Lösungsraum $y_{hom(}x)$ der homogenen Dgl. enthalten ist, und damit nicht die inhomogene Dgl. lösen kann).

Wir machen einen weiteren Ansatz, wir multiplizieren unseren Ansatz nocheinmal mit x: $yp(x) = a\,x^2\,e^x$.

Zur Berechnung der Unbekannten a setzen wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

$yp(x) = ax^2e^x \rightarrow yp'(x) = 2axe^x + ax^2e^x$ und $yp''(x) = 2a\,e^x + 4ax\,e^x + ax^2e^x$

Wir erhalten:

$y'' - 2y' + y = e^x$
$\Leftrightarrow\ 2a\,e^x + 4ax\,e^x + ax^2e^x - 4axe^x - 2\,ax^2e^x + ax^2e^x = e^x$
$\Leftrightarrow 2a\,e^x = e^x$
$\Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a = 0{,}5$

Also ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.:
$yp\ (x) = 0{,}5x^2e^x$.

Bemerkung: Man löst immer, wenn die Störfunktion eine Schwingung ist (also cos() oder sin() enthält) oder eine e-Funktion ist, zuerst die homogene Dgl..
Dann kann man sofort erkennen, welche Ansätze, - in unserem Beispiel, dass die beide Ansätze $yp(x) = a\,e^x$ und $yp\ (x) = axe^x$ im Lösungsraum $y_{hom(}x)$ der homogenen Dgl. enthalten sind, und setzt dann gleich den richtigen Ansatz an: $yp\ (x) = ax^2e^x$.

Zu Aufgabe 3
Zu a)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''+6y'+10y=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$

Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm j$ = a +jb (a = -3, b=1)

Das ist ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= $e^{-3x}\cos(x)$ und y2(x) = $e^{-3x}\sin(x)$ (siehe Tabelle in der Vorlesung)

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

y_{hom}(x)= C1 $e^{-3x}\cos(x)$ + C2 $e^{-3x}\sin(x)$, C1∈R, C2 ∈ R.

Zu b)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''+2y'-3y=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$
Das sind zwei verschiedene reelle Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= e^{x} und y2(x) = e^{-3x} (siehe Tabelle in der Vorlesung)

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

y_{hom}(x)= C1 e^{x} + C2 e^{-3x}, C1∈R, C2 ∈ R.

Zu c)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''+2y'=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$

Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1}$, also $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$
Das sind zwei verschiedene reelle Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= e^{-2x} und y2(x) = 1

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$y_{hom}(x)$= C1 e^{-2x} + C2, C1∈R, C2 ∈ R.

Zu a)
1. Schritt; **(Siehe 5a))**
Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung y''+6y'+10y=0.
Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat die Gestalt:
$y_{hom}(x)$= C1 $e^{-3x}\cos(x)$ + C2 $e^{-3x}\sin(x)$, C1∈R, C2 ∈ R.

2. Schritt: (Siehe 2a)
Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz: Dieser bestimmt sich aus der Störfunktion. Diese ist = x und damit eine Gerade. Wir setzen also für yp(x) auch eine Gerade an: yp(x) = ax+b

Zur Berechnung der Unbekannten Konstanten a und b setzten wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = ax+b → yp'(x) =a und yp''(x) = 0

Wir erhalten:

yp'' + 6yp' + 10yp = x ⇔ 6a+10ax+10b = x

⇔ (6a + 10b) + 10a x = x
⇔ (6a + 10b) = 0 und 10 a = 1
⇔ $a = \frac{1}{10}, b = \frac{-6}{100}$

Also ist

$$yp\,(x) = \frac{1}{10}x - \frac{6}{100}\quad .$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:

$y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + yp(x)$

$= \ C1\, e^{-3x}\cos(x) + C2\ e^{-3x}\sin(x) \ + \ \frac{1}{10}x - \frac{6}{100}$, C1∈R, C2 ∈ R.

3. Schritt: Lösung des Anfangswertproblems:
Wir müssen nun noch die spezielle Lösung finden, die die Anfangsbedingung y(0) = 0 und y'(0)=2 erfüllt.

Es ist:

$y_{inhom}(0) = C1e^{-0}\cos(0) + C2e^{-0}\sin(0) + ... = C1 - \frac{6}{100} \overset{!}{=} 0$. Daraus folgt für C1:

C1 = $\frac{6}{100}$ =0,06.

Weiterhin ist:

$(y_{inhom}(x))' = -3\,C1\,e^{-3x}\cos(x) - C1e^{-3x}\sin(x) - 3\,C2\ e^{-3x}\sin(x) + C2e^{-3x}\cos(x) + \frac{1}{10}$,

und folglich $(y_{inhom}(0))' = -3\,C1 + C2 + \frac{1}{10} \overset{!}{=} 2 \Leftrightarrow C2 = 1{,}08$.

Die einzige Lösung unseres Anfangswertproblems lautet also: $y(x) = 0{,}06\,e^{-3x}\cos(x) + 1{,}08\ e^{-3x}\sin(x) + \frac{1}{10}x - \frac{6}{100}$

Zu b)
1. Schritt (siehe 5b))
Wir lösen zuerst die homogene Differentialgleichung y''+2y'-3y=0.
Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat die Gestalt:

$y_{hom}(x) = C1\,e^{x} + C2\ e^{-3x}$, C1∈R, C2 ∈ R.

2. Schritt:
Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz:

yp(x) = acos(2x) + bsin(2x) .

Zur Berechnung der Unbekannten Konstanten a,b setzen wir yp(x)
in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = acos(2x) + bsin(2x) → (yp)'(x) = -2asin(2x) + 2bcos(2x) und
(yp)''(x) = -4acos(2x) - 4bsin(2x)

Wir erhalten:

yp'' + 2yp' -3yp = 3sin(2x)+cos(2x) ⇔

-4acos(2x) - 4bsin(2x) -4asin(2x) + 4bcos(2x) -3acos(2x) -3bsin(2) = 3sin(2x)+cos(2x)

(-4a +4b -3a) cos(2x) + (-4b -4a -3b) sin(2x) = 3sin(2x)+cos(2x)

$\Leftrightarrow$ (-7a + 4b) = 1 und (-7b – 4a) = 3

$\Leftrightarrow \; a = \dfrac{-19}{65}, b = \dfrac{-17}{65}$

Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:

$y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + yp(x)$

$= C1\,e^{x} + C2\;e^{-3x} .- \dfrac{19}{65}\cos(2x) - \dfrac{17}{65}\sin(2x)$, $C1 \in R$, $C2 \in R$

<u>Zu c)</u>

1.Schritt: (siehe 5c)
Wir lösen zuerst die homogene Differentialgleichung y''+2y'=0.
Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat die Gestalt:

$y_{hom}(x) = C1\,e^{-2x} + C2$, $C1 \in R$, $C2 \in R$.

2.Schritt:
Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
Dazu machen wir zunächst einen geeigneten Ansatz: Dieser bestimmt sich aus der Störfunktion und der linken Seite der Dgl.. Die Störfunktion ist 2. Da auf der linken Seite y(x) fehlt, können wir keine Konstante ansetzen.
Wir setzen für yp(x) eine Gerade an: yp(x) = ax+b

Zur Berechnung der Unbekannten Konstanten a und b setzten wir yp(x) in die Diffgl. ein und machen einen Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite:

yp(x) = ax+b $\rightarrow$ yp'(x) =a und yp''(x) = 0

Wir erhalten:

$\Leftrightarrow$ yp'' + 2yp' = 2 $\Leftrightarrow$ 2a = 2 $\Leftrightarrow$ a = 1 (b ist beliebig wählbar, wir wählen b=0)

Also ist yp (x) = x .

Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Diff.gleichung lautet folglich:

$y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + yp(x) = x + C1\,e^{-2x} + C2$, $C1 \in R$, $C2 \in R$.

<u>Zu Aufgabe 5)</u>
Bestimmen Sie durch PBZ die Urbildfunktion zu

$$a) \quad \frac{s-4}{(s+3)(s-1)} \qquad b) \quad \frac{3s+5}{2(s-4)(s-2)}$$

Zu a)

Ansatz: $\dfrac{s-4}{(s+3)(s-1)} = \dfrac{A}{(s+3)} + \dfrac{B}{(s-1)}$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\frac{s-4}{(s+3)(s-1)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s-1)} \Leftrightarrow s-4 = A(s-1)+B(s+3)$$

Wir setzen 2 verscheidene s-Werte (am besten die Nullstellen des Nenners) ein:

s= 1: $s-4 = A(s-1)+B(s+3) \Leftrightarrow -3 = 4B \Leftrightarrow B = -\dfrac{3}{4}$

s= -3: $s-4 = A(s-1)+B(s+3) \Leftrightarrow -7 = -4A \Leftrightarrow A = \dfrac{7}{4}$

Daraus folgt:

F(s)= $\dfrac{s-4}{(s+3)(s-1)} = \dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{1}{(s+3)} - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(s-1)}$

Zu b)

Ansatz: $\dfrac{3s+5}{2(s-4)(s-2)} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{A}{s-4} + \dfrac{B}{s-2}\right)$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\frac{3s+5}{(s-4)(s-2)} = \left(\frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2}\right) \Leftrightarrow 3s+5 = A(s-2)+B(s-4)$$

Wir setzen 2 verscheidene s-Werte (am besten die Nullstellen des Nenners) ein:

s= 4: $3s+5 = A(s-2)+B(s-4) \Leftrightarrow 17 = 2A \Rightarrow A = \dfrac{17}{2}$

s= 2: $3s+5 = A(s-2)+B(s-4) \Leftrightarrow 11 = -2B \Rightarrow B = -\dfrac{11}{2}$

Daraus folgt:

F(s)= $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{A}{s-4} + \dfrac{B}{s-2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{17}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-4)} - \dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-2)}\right)$

Zu Aufgabe 6)

Besitzt ein Polynom $a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ zwei reelle Nullstellen s_1 und s_2, so kann man es in Linearfaktoren zerlegen: $a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_2(s - s_1)(s - s_2)$.

Berechnen Sie Partialbruchzerlegung!

$a)\quad F(s) = \dfrac{s+2}{s^2 - s - 6} \qquad b)\quad F(s) = \dfrac{3s}{5s^2 + 10s + 5} \qquad c)\quad F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$

Zu a)

Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$$s^2 - s - 6 = 0 \Leftrightarrow s_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Daraus folgt:

$s^2 - s - 6 = 0 = (s-3)(s+2)$ und

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 - s - 6} = \frac{s+2}{(s-3)(s+2)} = \frac{1}{s-3}$$

Zu b)

Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$5s^2 + 10s + 5 = 0 \Leftrightarrow s^2 + 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow s_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$ (doppelt)

Daraus folgt:

$5s^2 + 10s + 5 = 5(s+1)^2$ und $\qquad F(s) = \dfrac{3s}{5s^2 + 10s + 5} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{s}{(s+1)^2}$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} \Leftrightarrow s = A(s+1) + B$$

s=1: 1 =2A+B

s=0: 0 = A+B --> A=1, B = -1

Rücktransformation mittels Tabelle 2:

$$F(s) = \frac{3}{5} \cdot \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

Zu c)

Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \Leftrightarrow 1 = A(s+2) + B(s+1)$$

s=-1: 1 =A
s=-2: 1 = -B --> A=1, B = -1

Rücktransformation mittels Tabelle 2:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Zu Aufgabe7)

Das Nennerpolynom kann mehr als 2 relle Nullstellen besitzen.
Tritt eine relle Nullstelle s1 im Nenner k-fach auf, so erhalten wir den Linearfaktor $(s\text{-}s1)^k$ im Nenner. Der Ansatz der Partialbrüche für ein LF im Nenner der Gestalt $(s\text{-}s1)^k$ (s1 ist k-fache reelle Nullstelle) ist :

$$\frac{A_1}{(s-s1)} + ... + \frac{A_k}{(s-s1)^k}$$

Berechnen Sie die Urbildfunktionen zu folgenden Funktionen F(s) mittels Partialbruchzerlegung!

$$F(s) = \frac{-2s^2 + 18s - 3}{s^3 - s^2 - 8s + 12}$$

Lösung:

1. **Schritt:** Nullstellen des Nenners bestimmen: s=2 (durch Probieren) , s=2, s= -3
2. **Schritt:** Ansatz für die Partialbrüche:

$$F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

3. Schritt: Bestimmung der Koeffizienten A,B,C der Partialbrüche:

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dem Hauptnenner von F(s) und setzen die Nullstellen s=2,-3 und s=1 ein. Wir erhalten ein GS mit 3 Gleichungen für A,B,C.
Wir lösen dieses GS durch den Gaus'schen Algorithmus und erhalten:
→ A=1, B=5, C=-3

<u>Zu Aufgabe8)</u>
Ein Nennerpolynom kann auch komplexe Nullstellen besitzen.
Ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen (s1, s1*) mit s1 = a+jb liefert als Produkt der Linearfaktoren ein Polynom 2. Ordnung der folgenden Gestalt:
(s-s1)(s-s1*) = $(s-a)^2 + b^2$

Der Ansatz der Partialbrüche für ein solches Produkt im Nenner ist: $\dfrac{A+Bs}{(s-a)^2+b^2}$

Berechnen Sie die Urbildfunktionen zu folgenden Funktionen F(s) mittels Partialbruchzerlegung!

a) F(s) **=** $\dfrac{(s+2)^2}{s^4-2s^3+3s^2-4s+2}$ **b)** $F(s)=\dfrac{-2s^2+3}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}$

<u>Zu a)</u>
1 Schritt: Zerlegung des Nenners von F(s) in Linearfaktoren.

Dazu bestimmen wir die Nullstellen des Nenners:
Wir erhalten die Nullstellen: s=1 (doppelt) und das Paar konjugiert komplexer Nullstellen: $s_1 = j\sqrt{2}$, $s_2 = -j\sqrt{2}$. Die LFZ des Nenners lautet folglich:

$$F(s)=\frac{(s+2)^2}{(s^2+2)(s-1)^2}.$$

2.Schritt: Ansatz für die Partialbrüche:

$$F(s)=\frac{(s+2)^2}{(s^2+2)(s-1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2}$$

3. Schritt: Berechnung der Koeffizienten A,B,C,D

$$F(s)=\frac{(s+2)^2}{(s^2+2)(s-1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2}$$

$\Leftrightarrow$

$$(s+2)^2 = A(s^2+2)(s-1)+B(s^2+2)+(Cs+D)(s-1)^2$$

Durch Einsetzen von 4 verschiedenen Werten für s (s = -2, s=-1, s=0, s=1)
Ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \text{mit den Lösungen}: A = 0 \quad B = 3 \quad C = 0 \quad D = -2$$

Ergebnis:

$$F(s) = \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{2}{s^2 + 2}$$

Zu b) $F(s) = \dfrac{-2s^2 + 3}{(s-1)\ (s^2 + 2s + 5)}$

Der Nenner hat eine reelle und ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen.

-->

Ansatz für die Partialbrüche:

$$F(s) = \frac{-2s^2 + 3}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$F(s) = \frac{-2s^2 + 3}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$
$$\Leftrightarrow -2s^2 + 3 = A(s^2 + 2s + 5) + (Bs + C)(s-1)$$

Wir setzen in diese Gleichung 3 verschiedene Werte für s ein, s=0, 1, -1:

s=0: 3 = 5A - C
s=1: 1 = 5A
s= - 1 : 1 = A 4 –2C + 2 B

und erhalten nach Lösung des Gleichungssystems:

A = 1/5, B = -1,9 , C = -2

Daraus ergibt sich:

$$F(s) = \frac{0{,}2}{(s-1)} + \frac{-1{,}9s - 2}{s^2 + 2s + 5}$$

Aufgabe 9) – wird in der Übung besprochen (Wiederholung)