Lösungen zu Blatt 1 Differentialgleichungen

Prof. Dr. B.Grabowski

Zu Aufgabe 1)

Zu a) Klassifizieren Sie folgende Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:
-Ordnung der Differentialgleichung
-Partiell oder gewöhnlich
- linear oder nicht linear

a1) $3y''-2y'=\sin(x)$ (gewöhnlich, linear)
a2) $3y'-xy=0$ (gewöhnlich, linear)
a3) 3y'y'''-2y=cos(x) (gewöhnlich, nichtlinear)
a4) $\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1}+3y(x_1,x_2)=0$ (partiell, linear)

Zu b) Klassifizieren Sie folgende lineare Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:
- Ordnung
-Konstante Koeffizienten oder nicht
-homogen oder inhomogen

b1) $3y''-2y'=\sin(x)$ (2. Ordnung, konstante K., inhomogen)
b2) $3y'''-xy=0$ (3. Ordnung, nicht konstante K., homogen)
b3) 3y''-x = sin(x)y' +y (2. Ordnung, nichtkonst. K., inhomogen)

Zu c) Klassifizieren Sie folgende Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien :
- Anfangswertproblem
- Randwertproblem
- weder noch

c1) $y''+3y=\sin(x), \quad y(\pi)=0, \quad y'(\pi)=-1$ Anfangswertproblem
c2) $y''+3y=\sin(x), \quad y(\pi/2)=2, \quad y(\pi)=0$ Randwertproblem
c3) $y''+3y=\sin(x)$ Weder noch

Zu Aufgabe 2)

Finden Sie durch « Draufschauen » mindestens eine Lösung der folgenden Differentialgleichung :

a) y'' + 3 y = sin(x)
b) y' + y = e^x

Zu a) Typ von y(x) muss eine Schwingung sein : y(x) = asin(x), einsetzen → a=0.5 ;
→ y(x) = 0.5 sin(x)

Zu b) Typ von y(x) muss eine e-Funktion sein : y(x) = ae^x , einsetzen → a=1/2 ;
→ y(x) = 0,5e^x

Zu Aufgabe 3)
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

Zu a) $y^{(4)} = \sin(x) + 1$ ($y^{(4)}$ ist die 4.te Ableitung von y(x))

4 mal integrieren:

Lösung: $y(x) = \sin(x) + \frac{1}{24}x^4 + C_1\frac{1}{6}x^3 + C_2\frac{1}{2}x^2 + C_3x + C_4$, $C_i \in R$, i=1,2,3,4.

Zu b) $2y'' = e^{-x}$.

2 mal integrieren:

Lösung: $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + C_1x + C_2$, $C_i \in R$, i=1,2.

Zu c) Geben Sie zusätzlich die Lösung y(x) der Differentialgleichung b) an, die die sogenannte Anfangsbedingung y(0)=2, y'(0)=1 erfüllt!

$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1$

Wir lösen das GS:

$y(0)=1/2+C_2 = 2$
$y'(0) = -1/2 + C_1 = 1$

und erhalten : C1=C2 = 3/2

Lösung: $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}(x+1)$

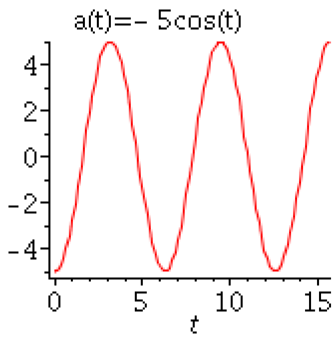
Zu Aufgabe 4)
Ein Pendel unterliege der periodischen Beschleunigung a(t) = -5cos(t).

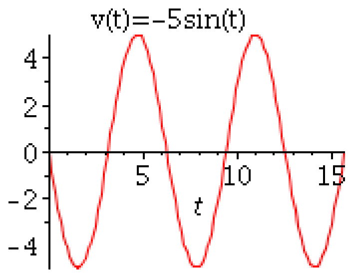
a) Bestimmen Sie alle möglichen Geschwindigkeits-Zeit-Funktionen v(t) und Weg-Zeit-Funktionen s(t), die für dieses Pendel in Frage kommen!
b) Bestimmen Sie v(t) und s(t) unter der Voraussetzung dass für das Pendel folgende Anfangsbedingungen erfüllt sind: s(0) = 5, v(0)=0.
c) Skizzieren Sie Beschleunigung a(t), Geschwindigkeit v(t) und Weg s(t) in Abhängigkeit von t für die Anfangswerte v(0)=0 und s(0) = 5.

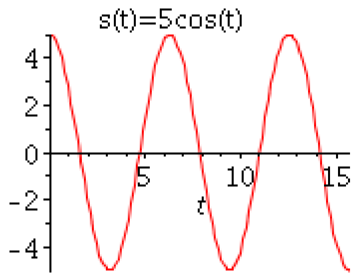
Lösung:
Zu a) a(t) 2 mal Integrieren → v(t) = $\int a(t)dt = 5\sin(t) + C1$, $C1 \in R$
s(t) = $\int v(t)dt = 5\cos(t) + tC1 + C2$, $C1, C2 \in R$

Zu b) s(0) = 5cos(0)+0C1+C2 = 5 + C2 = 5 → C2 =0
v(0) = 5 sin(0) + C1 = C1 = 0
→ s(t)= 5 cos(t) v(t)= - 5 sin(t)

Zu c)







Zu Aufgabe 5)

Welche der folgenden Differentialgleichungen sind separabel (= trennbar)?

a) $3y' - xy = 0$ b) $xy' + y = 2$ c) $y' + y = 2x$ d) $3y' \cdot y = e^x$

e) $f_1(x)y' + fo(x)y=0$

f) Um welche Art Differentialgleichung handelt es sich bei e) ?
Formulieren Sie eine allgemeine Aussage: Differentialgleichungen der Art ….. sind …. separabel. (Füllen Sie …. aus!)

Lösung:

a) trennbar b) trennbar c) nicht trennbar d) trennbar e) trennbar

f) e) ist eine homogene lineare Differentialgleichung.
Differentialgleichungen der Art *linear, homogen 1. Ordnung* sind *immer* Separabel.

$$f_1(x)y' + fo(x)y=0$$

$$--> y' = \frac{-fo(x)}{f_1(x)} \cdot y$$

$$= h(x) \cdot g(y)$$

Zu Aufgabe 6)
Zu a)

$$y'y = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow ydy = (\sqrt{x} + 2)dx \Leftrightarrow \int ydy = \int (\sqrt{x} + 2)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x + C$$

$\Leftrightarrow$ Die Lösungen sind alle Funktionen der Gestalt

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 4x + C}, C \in R \text{ oder } \quad y = -\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 4x + C}, C \in R}$$

Zu b) $y' - xy = 0 \Leftrightarrow y' = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \quad \textit{für} \quad y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int xdx \Leftrightarrow \ln(|y|) = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^C, C \in R \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2} K, K > 0$$

$$\Leftrightarrow y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K \neq 0, K \in R \qquad (1)$$

y=0 ist auch Lösung. (2)

Alle Funktionen der Gestalt (1) oder (2) sind Lösung der Dgl.

Wir können für diese Menge von Lösungen (allgemeine Lösung) auch schreiben:

$$\boxed{y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K \in R}$$

Zu c) 2y' + 3y = 0

$$2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{3}{2}dx \quad \textit{für} \quad y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{3}{2}dx \Leftrightarrow \ln(|y|) = -\frac{3}{2}x + C \Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{3}{2}x} \cdot e^C, C \in R \Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{3}{2}x} \cdot K, K > 0$$

$$\Leftrightarrow y = Ke^{-\frac{3}{2}x}, K \neq 0, K \in R \qquad (1)$$

y=0 ist auch Lösung. (2)

Alle Funktionen der Gestalt (1) oder (2) sind Lösung der Dgl.

Wir können für diese Menge von Lösungen (allgemeine Lösung) auch schreiben:

$$\boxed{y = Ke^{-\frac{3}{2}x}, K \in R}$$

Zu d) 4y' + y = 0

$$4y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{4}dx \quad \textit{für} \quad y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{4}dx \Leftrightarrow \ln(|y|) = -\frac{1}{4}x + C \Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot e^C, C \in R \Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot K, K > 0$$

$$\Leftrightarrow y = Ke^{-\frac{1}{4}x}, K \neq 0, K \in R \qquad (1)$$

y=0 ist auch Lösung. (2)

Alle Funktionen der Gestalt (1) oder (2) sind Lösung der Dgl.

Wir können für diese Menge von Lösungen (allgemeine Lösung) auch schreiben:

$$\boxed{y = Ke^{-\frac{1}{4}x}, K \in R}$$

Zu e) b) c) und d) sind lineare Dgl. 1. Ordnung, homogen mit konstanten © und d) und nichtkonstanten (b) Koeffizienten

Wir stellen fest:
Homogene lineare Dgl. 1. Ordnung der Form:
$a(x)y' + b(x)y = 0$
haben die allgemeine Lösung:

$$\boxed{y = Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, K \in R}$$

Im Spezielfall konstanter Koeffizienten ($ay' + by = 0$, lautet die allgemeine Lösung folglich:

$$\boxed{y = Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in R}$$

y'+2y=0 hat damit die allgemeine Lösung: $\boxed{y = Ke^{-2x}, K \in R}$