Lösungen zu Übungsblatt „Differentialgleichungen 2. Ordnung“

<u>Zu Aufgabe 1</u>

a) 1. Man zeigt, dass $b_1(x)$ und $b_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung y’’-2y’+5y=0 sind, indem man $b_1(x)$ und $b_2(x)$ in die Differentialgleichung einsetzt!

2. Man zeigt die lineare Unabhängigkeit von $b_1(x)$ und $b_2(x)$:

$$\lambda_1 e^x \cos(2x) + \lambda_2 e^x \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x) = 0 \qquad \forall x$$

Setzen wir x =0 ein, so erhalten wir $\lambda_1 = 0$
Setzen wir x=π/4 ein, so erhalten wir $\lambda_2 = 0$

b) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y_{\text{hom}}(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)), \qquad C_1, C_2 \in R$$

<u>Zu Aufgabe 2</u>

$$b(x) = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + je^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Demzufolge ist
Realteil=Re($b(x)) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und Imaginärteil = $\mathrm{Im}(b(x)) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

<u>Zu Aufgabe 3</u>
<u>Zu a)</u>

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y’’+6y’+10y=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

Wir erhalten als Nullstellen :

$$\lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm j = a + jb \quad (a = -3, b=1)$$

Das ist ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= $e^{-3x}\cos(x)$ und y2(x) = $e^{-3x}\sin(x)$ (siehe Tabelle in der Vorlesung)

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$y_{\text{hom}}(x)$= C1 $e^{-3x}\cos(x)$ + C2 $e^{-3x}\sin(x)$, C1∈R, C2 ∈ R.

Zu b)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''+2y'-3y=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$
Das sind zwei verschiedene reelle Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= e^x und y2(x) = e^{-3x} (siehe Tabelle in der Vorlesung)

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$y_{hom}(x) = C1\, e^x + C2\, e^{-3x}$, $C1 \in R$, $C2 \in R$.

Zu c)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''+2y'=0.
Die charakteristische Gleichung lautet:

$\lambda^2 + 2\lambda = 0$

Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1}$, also $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$
Das sind zwei verschiedene reelle Nullstellen.
Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch

y1(x)= e^{-2x} und y2(x) = 1

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$y_{hom}(x) = C1\, e^{-2x} + C2$, $C1 \in R$, $C2 \in R$.

Zu d)

Wir lösen die homogene Differentialgleichung y''-2y'+ y = 2
Die charakteristische Gleichung lautet: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
Wir erhalten als Nullstellen :

$\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$, also ist $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ eine doppelte reelle Nullstelle.

Damit ergeben sich zwei linear unabhängige (Basis)Lösungen der homogenen Diffgl. durch y1(x)= e^x und y2(x) = xe^x.

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung hat dann die Gestalt:
y_{hom}(x)= e^x (C1 + xC2), C1∈R, C2 ∈ R.

Zu Aufgabe 4

Zu a)

Es ist g/l = 9,81/1,5 = 6,54
Die zu lösende Diff.gl. lautet folglich: $\ddot{x} - 6{,}54x = 0$, x(0)= 0,75m, $\dot{x}(0) = 0$.
Die Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 6{,}54 = 0$
ergibt: $\lambda_1 = 2{,}5573$ und $\lambda_2 = -2{,}5573$. Die allgemeine Lösung der Diff.gl lautet somit:

$$x(t) = C_1\, e^{2{,}5573t} + C_2 e^{-2{,}5573t}, \text{ C1, C2} \in \text{R}$$

Setzen wir die Anfangsbedingungen ein, so ergibt sich:
$x(0) = C_1 + C_2 = 0{,}75$ und $\dot{x}(0) = C_1\, 2{,}5573 - C_2\, 2{,}5573 = 0$
Lösen wir diese beiden Gleichungen nach C1 und C2 auf, so erhalten wir:

C1 = C2 = 0,375.
Das Ergebnis lautet also: $x(t) = 0{,}375(e^{2{,}5573t} + e^{-2{,}5573t})$ ist die Länge des überhängenden Teils des Seiles zur Zeit t (x(t) in m, t in sec).

Zu b)
x(t) = 1,5 bzw. $x(t) = 0{,}375(e^{2{,}5573t} + e^{-2{,}5573t})$ = 1,5 ist nach t aufzulösen!
Wir substituieren zunächst y = $e^{2{,}5573t}$. Damit ist :

$$0{,}375(e^{2{,}5573t} + e^{-2{,}5573t}) = 1{,}5 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} - \frac{1{,}5}{0{,}375} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0$$

Wir lösen diese Gleichung nach y auf und machen die Rücksubstitution t = ln(y)/2,5573.
Wir erhalten das Ergebnis: t = 0,515 sec.

$$\boxed{x(t) = 0{,}375(e^{2{,}5573t} + e^{-2{,}5573t}) = 1{,}5 \Leftrightarrow t = 0{,}515 \text{ sec.}}$$

Zu Aufgabe 5

Zu a)

Gegeben sei Dgl: $20\cdot\ddot{x} + 1000\cdot\dot{x} + 10500\cdot x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 50\cdot\dot{x} + 525\cdot x = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 50\lambda + 525 = 0$, Solution is : $\{\lambda = -15\}$, $\{\lambda = -35\}$

Ansatz für die homogene Lösung:

$x_{hom}(t) = C_1\cdot e^{-15t} + C_2\cdot e^{-25t}$

1. Anfangsbedingung: x(0)=0 ergibt: $0 = C_1 + C_2$ (1)

Mit $\dot{x}(t) = -15\cdot C_1\cdot e^{-15t} - 25\cdot C_2\cdot e^{-25t}$ =3

2. Anfangsbedingung: : $3 = \dot{x}(0) \Rightarrow 3 = -15C_1 - 25\,C_2$ (2)

Die beiden Gleichungen (1) und (2) haben die Lösungen $C_1 =$ 0.3 und $C_2 =$ - 0.3

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung (des AWP):

$x(t) = 0.3\cdot e^{-15t} - 0.3\cdot e^{-25t} = 0.3\,(e^{-15t} - e^{-25t})$

<u>Zu b)</u> Skizze: