2.4. Lineare DGl'en 1. Ordnung

<u>Def:</u> Eine DGl 1. Ordnung heißt <u>linear</u>, wenn sie in der Form

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)} \quad (*)$$

darstellbar ist.

Funktion $g(x)$ heißt <u>Störfunktion</u>, oder <u>Störglied</u>.

~~oder~~ Falls $g(x) \equiv 0 \ \forall x$, dann heißt (2.4.*) <u>homogen</u>, ansonsten <u>inhomogen</u>.

Allg. Form:

$$\boxed{f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x) = 0}$$

$$\downarrow$$

$$y' + \boxed{\frac{g(x)}{f(x)}}\,y = \boxed{-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

(*)- Form

Bsple:

(1) $y' - xy = 0$ linear, hom.

(2) $\cancel{x}y' + 2y = e^x \to y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^x}{x} \to$ lin., inh.

(3) $y' = 1 - y^2 \quad \to y' + y^2 = 1$ nicht linear

inh.

(4) $yy' + x = 0$

$\to y' + x \cdot \frac{1}{y} = 0$ nicht linear homog.

(5) $y' + \tan x \cdot y = 2 \sin x \cos x$

$\boxed{\text{Ordnung } 1}$ inhomogen, linear

2.4.2. Integration der homogenen lDGl 1. Ordn.

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \quad (\ast\ast)$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - f(x) \cdot y; \quad \Big| \begin{array}{l} :y \\ \ast dx \end{array}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\, dx \qquad y \neq 0$$

$$\ln|y| = -\int f(x)\, dx + \ln|c|, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int f(x)\, dx, \quad c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0$$

$$\boxed{y = c\, e^{-\int f(x)\, dx}, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

weil bei $c = 0$: $y \equiv 0 \ \forall x$

DGl:
$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

$y = 0 \Rightarrow y' = 0$

$$0 + f \cdot 0 = 0$$

Also: $y = 0$ triviale Lösung (part. Lös.), die eine homog. lin. DGl immer löst.

Durch "$c \in \mathbb{R}$" haben wir diese sp. Lösung in unserer Formel für die allg. Lösung

$$y = c \cdot e^{-\int f(x)\, dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2) $x^2 y' + y = 0$

$y' + \frac{y}{x^2} = 0;$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot y;$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} = -x^{-2}dx$

$\ln|y| = -\int x^{-2}dx = -\frac{1}{-1}x^{-1} + \ln|c|,$ $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\ln|y| = x^{-1} + \ln|c|, \quad c \neq 0$

$y = c\, e^{\frac{1}{x}}, \quad c \neq 0$

mit $y=0$ – Lösung ist

auch $c=0$ erlaubt:

$y = c\, e^{\frac{1}{x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$

Bsp:

$y' - xy = 0$ – hom.
– 1. Lin.
– 1. Ordn.

TdV:

$$\frac{dy}{dx} = xy \quad , \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_1 \in \mathbb{R} \rightarrow c_1 = \ln c_2 \quad , \quad c_2 > 0$$

$$\left(\begin{array}{ll} 0 < c_2 < 1 & : -\infty < c_1 < 0 \\ c_2 = 1 & : \quad c_1 = 0 \\ c_2 > 1 & : 0 < c_1 < +\infty \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln|y| - \ln c_2 = \frac{1}{2}x^2;$$

$$\ln\frac{|y|}{c_2} = \ln\left|\frac{y}{c_2}\right| = \frac{1}{2}x^2;$$

$$e^{\ln\left|\frac{y}{c_2}\right|} = e^{\frac{1}{2}x^2};$$

$$\left|\frac{y}{c_2}\right| = e^{\frac{1}{2}x^2};$$

$$|y| = c_2\, e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad c_2 > 0$$

$$y = c_2\, e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad c_2 \neq 0$$

$c_2 = 0 \Longrightarrow y = 0$ – triviale Lösung

$y' = 0' = 0$:

$$0 - x \cdot 0 = 0 \quad \forall x$$

$\Longrightarrow$ Die allgemeine Lösung der DGl lautet:

$$y = c\, e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y' - xy = 0}$$

2.4.3. Integration der inhomogenen linearen DGl'en 1. Ordnung

2 Methoden:

1. "Variation der Konstanten"
2. "Zerlegungssatz - Methode"

2.4.3.1. Variation der Konstanten (VdK)

Eine inhomogene lineare DGl 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (***)$$

lässt sich wie folgt durch VdK integrieren:

Zunächst wird die zugehörige homogene DGl

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

durch TdV gelöst.

$\Rightarrow$ Allg. Lösung der hom. Gl:

$$y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir ersetzen die Integr.-Konst. C durch eine (noch unbekannte) Fkt. $K(x)$ und versuchen, die inhomogene DGl (***) durch den Produktansatz:

$$y = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

zu lösen.

Dazu wird die 1. Abl. ausgerechnet!

$$y' = \left(K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}\right)' =$$

Produkt- und Kettenregel

$$= K'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + K(x)\left(e^{-\int f(x)dx}\right)' =$$

$$= K'(x) e^{-\int f(x)dx} + K(x) e^{-\int f(x)dx} \left(-\int f(x)dx\right)' =$$

$$= K'(x) e^{-\int f(x)dx} + K(x)\left(-f(x)\right) e^{-\int f(x)dx} =$$

$$\underbrace{= K'(x) e^{-\int f(x)dx} - f(x) \cdot \underbrace{K(x) e^{-\int f(x)dx}}_{= y \text{ (Prod. Ansatz)}}}_{y'}$$

DGl:

$$y' + \underline{f(x)y} = g(x)$$

$$k'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} \cancel{- f(x)k(x)e^{-\int f(x)dx}} + \cancel{+ f(x)k(x)e^{-\int f(x)dx}} = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$k'(x)\, e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

DGl 1. Ordn., linear, bzg $k(x)$

30.11.2011

$$\boxed{k'(x)} \cdot e^{-\int f(x)\,dx} = g(x)$$

$$e^{\xi} > 0 \quad \forall \xi$$

insbes. $\neq 0$

$\Downarrow$

$$k'(x) = \frac{g(x)}{e^{-\int f(x)\,dx}} =$$

$$= g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\int dk(x) = \int \left(g(x)\, e^{\int f(x)\,dx} \right) dx$$

$$\boxed{k(x) = \int \left(g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} \right) dx}$$

Mit dieser Fkt. $k(x)$

ist die allgemeine

Lösung der DGl

$$y' + f(x)y = g(x)$$

durch folg. Formel gegeben:

$$y_{allg}(x) = \left(\int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \right) e^{-\int f(x)dx}$$

Bspl:

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x$$

DGl:
- linear
- Ord. 1
- inhomog.

VdK:

homog. DGl:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};$$

$c \neq 0$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|;$$

$$\ln|y| + \ln|x| - \ln|c| = \ln 1$$

$$\left|\frac{yx}{c}\right| = 1 \iff y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$c = 0 \Rightarrow y = 0 \ \forall x$?

Die Lösung:

$$y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\cancel{y = \begin{cases} \text{Formel}, & c \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

Vdk!

$\cancel{C \in \mathbb{R}} \rightsquigarrow C = C(x)$

Ansatz: $y = \dfrac{C(x)}{x}$

$$y' = C'(x) \cdot \frac{1}{x} + C(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad y' + \frac{y}{x} = \cos x$$

$$\frac{C'}{x} \cancel{- \frac{C}{x^2}} \cancel{+ \frac{C}{x^2}} = \cos x$$

$$C' = x \cdot \cos x$$

$$\int dC = \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$C(x) = \int x \cdot \cos x \, dx$$

Partielle Integration:

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \longrightarrow v = \sin x$

$$c(x) \stackrel{.}{=} \int x \cos x \, dx =$$

$$= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + \tilde{c} = \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$y_{a4}(x) = \frac{x \cdot \sin x + \cos x + \tilde{c}}{x}$$

$$\boxed{y_{a4}(x) = \left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right) + \frac{\tilde{c}}{x}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}}$$

"Zwei" Summanden,

Lösungsformel:

$$y(x) = \left(\int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} \, dx + c \right) e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x$$

$$g(x) = \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = \left(\int \cos x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} \, dx + c \right) e^{-\int \frac{dx}{x}} =$$

$$= \left(\int \cos x \; e^{\ln|x|} \, dx + c \right) e^{-\ln|x|} =$$

$$= \left(\int \cos x \, |x| \, dx + c \right) |x| =$$

$$= \cancel{\int \left(|x| \cos |x| + |x| \right) dx}$$

$$= \left(\int |x| \cdot \cos x \, dx + c \right) |x| \quad \text{usw.}$$

HA

Bsp:

$$y' - 3y = xe^{4x}, \quad y(1) = 2$$

AWP:

hom. Gl:

$$y' - 3y = \cancel{xe^{4x}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y \iff \frac{dy}{y} = 3dx$$

$$\ln|y| = 3x + \ln|c|, \quad c \neq 0$$

Zusammen fassen mit "y=0 - tr. Lösung"

$$\boxed{y = C \cdot e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Allg. Lösung der zug. hom. Gl.

VdK:

$c = k(x)$

Ansatz: $\boxed{y = k(x) \cdot e^{3x}};$

$y' = k' e^{3x} + k \cdot \left(3e^{3x}\right),$

$k' e^{3x} + \cancel{3k e^{3x}} - \cancel{3k e^{3x}} = x e^{4x}$

$k' = x \dfrac{e^{4x}}{e^{3x}} = x e^{x}$

$k(x) = \int x e^{x} \, dx =$

$= x e^{x} - \int e^{x} \, dx =$

$= \underbrace{e^{x}(x-1) + c,}_{c \in \mathbb{R}}$

~~[illegible]~~

$$y = K(x) \cdot e^{3x} =$$

$$= \left(e^{x}(x-1) + c\right) e^{3x} =$$

$$\boxed{= \underbrace{e^{4x}(x-1)}_{} + \underbrace{c\, e^{3x}}_{}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Zwei! Summanden

AWP! $\quad y(1) = 2 \quad$ (AB)

$$2 = e^{4}(1-1) + c\, e^{3};$$

$$\underline{c = 2e^{-3}}$$

$$y_{AWP}(x) = \underbrace{e^{4x}(x-1) + 2e^{3x-3}}_{}.$$

2.4.3.2.

Integration der DGl'en mittels Zerlegungssatzes

Wir bleiben bei den linearen inhomogenen DGl'en 1. Ordnung:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Satz (Zerlegungssatz, Ord. 1):

Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ einer inhomogenen linearen DGl 1. Ordnung vom Typ:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als Summe der allgemeinen Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen homogenen DGl

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

und einer (beliebigen) speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen linearen DGl darstellbar:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

<u>Bem:</u> Auch die lineare DGl'en höherer Ordnunge besitzen diese Eigenschaft.

<u>Bew.:</u> Sei y_0 die allgemeine Lösung der Gl.

$$y_0' + f(x)\cdot y_0 = 0$$

und y_p eine beliebige, aber fixe, spezielle Lösung der inhomogenen Gl:

$$y_p' + f(x)\cdot y_p = g(x)$$

1) Die Summe

$$y_p + y_0 = y$$

löst die inh. Gleichung:

$$y_0' + f(x)\cdot y_0 = 0$$

$$y_p' + f(x)\cdot y_p = g(x)$$

2.2. $$\underbrace{y' + f(x)\cdot y} = g(x)$$

$$y' + f(x)\cdot y =$$

$$= (y_p + y_0)' + f(x)\cdot (y_p + y_0) =$$

$$= y_p' + y_0' + f(x)\cdot y_p + f(x)\cdot y_0 =$$

$$= \underbrace{\left(y_p' + f(x)\cdot y_p\right)}_{= g(x)} + \underbrace{\left(y_0' + f(x)\cdot y_0\right)}_{= 0} =$$

$$= g(x) + 0 = g(x)$$

Gezeigt: $y = y_0 + y_p$ löst die DGl.

Gibt es weitere Lösungen?

Da y_0 die allgemeine Lösung der hom. DGl. ist, besitzt y_0 und damit auch $y = y_0 + y_p$, genau einen frei wählbaren Parameter. Dadurch wird der 1-D Lösungsraum eindeutig definiert.

$\Rightarrow$ Es gibt keine weitere Lösungen.

$\Rightarrow$ Damit ist $y = y_0 + y_p$ die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGl 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x),$$ q.e.d. $\blacksquare$

Zusammenfassung:

Integration einer lin. inh. DGl 1. Ordn. durch Anwendung des Zerlegungssatzes:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

1. Integration der zugeh. hom. DGl:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

durch TdV:

$$y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Mit Hilfe eines (spez) geeigneten Lösungsansatzes, der auch Parameter enthält, wird eine spezielle Lösung y_p der inh. Gl bestimmt.

3. Die allg. Lösung y der inhomogenen Gl. ist dann die Summe:

$$y = y_0 + y_p$$

<u>Bem.:</u> Der Lösungsansatz für y_p hängt sowohl vom Typ der Koeffizienten-funktion $f(x)$ als auch vom Typ der Störfunktion $g(x)$ ab.

Dieses Vorgehen gelingt nur in einzelnen einfachen Fällen. (Im Gegensatz zur VdK).

Bsp:

$$\underline{y' - \tan x \cdot y} = \underline{\underline{2 \cdot \sin x}}$$

1). $y' - \tan x \cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot y \quad , y \neq 0$$

$(y = 0 - \text{tr. Lösung})$

$$\frac{dy}{y} = \tan x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln|y| = \boxed{\ln\left|\frac{c}{\cos x}\right|} = -\ln|\cos x| + \ln|c|$$

$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y_0 = \frac{c}{\cos x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösungsansatz:

$$y_p = A \cdot \cos x$$

A ist noch zu bestimmen

$$y_p' = -A \cdot \sin x$$

$\downarrow$ in die Gl.

$$y_p' - (\tan x) y_p = y_p' - \frac{\sin x}{\cos x} y_p =$$
$$= 2 \cdot \sin x$$

$\Longrightarrow$

$$-A \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot A \cos x = 2 \sin x$$

$$-A \sin x - A \sin x = 2 \sin x$$

$$-2A \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x \quad \forall x$$

$$-2A = 2$$

$$\underline{A = -1}$$

$\Rightarrow$ Die sp. Lösung:

$$y_p = -\cos x$$

(Check: $y_p \to$ Gl.)

Dann: die allgemeine Lösung der inh. Gl ist

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) =$$

$$= \frac{C}{\cos x} - \cos x, \quad C \in \mathbb{R}.$$