2.2. Differentialgleichungen

1. Ordnung

$$F(y', y, x) = 0$$

$$y'(x) = f(x, y)$$

Durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von $f(x,y)$ ~~genau~~ genau eine Lösungskurve.

2.2.1. DGl'en mit trennbaren Variablen (TdV)

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

heißt separabel und läßt sich durch "Trennung der Variablen" (TdV) lösen.

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

(i) $\cancel{\sin(x \cdot \cos y)}$ ↯

(ii) $\sin x \cdot \cos y$ ✓

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Das Ziel: x und y an verschiedenen Seiten der Gl. zu haben:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad (*)$$

Differentiale dx, dy sollen im jew. Zähler stehen.

Nun kann man $(*)$ integrieren:

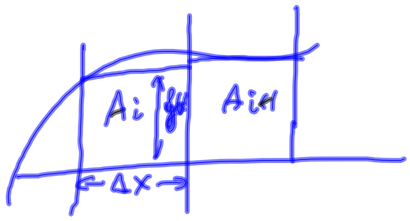
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

Nur y als Variable; | Nur x als Variable

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y) \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = f(x) \cdot g(y) \cdot dx \quad \Big| / g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$



$$A = \sum_i A_i$$

$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow dx$$

$\int \to$ "Summe aller Werte an allen Stellen"

Summe der elementaren Rechtecksflächen:

Höhe: $f(x)$

Grundseite: dx

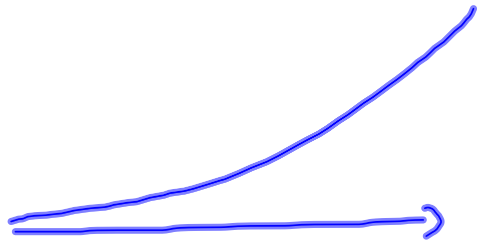
$\to$ summiert werden

$f(x)\, dx$

$$\frac{dy}{g(y)} = \underbrace{\overset{\text{"Höhe"}}{f(x)}\;\overset{\text{"Grundseite"}}{dx}}_{\text{"elementare Fläche"}}$$

$$\|$$

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{\text{"Höhe"}} \cdot \underbrace{dy}_{\text{"Grundseite"}}$$



$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$(g(y) \neq 0)$

ist gewährleistet, da sonst $g \cdot f \equiv 0$

Bsp: $y' = y$

- DGl 1. Ord.
- explizit
- separabel

⇓

TdV:

$$y' = \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\text{"}\ln|y| + c_1 = x + c_2\text{"}$$

$$\ln|y| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{x+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= e^x \cdot \underbrace{e^c}_{>0,\ \text{beliebig}} =$$

$$= d \cdot e^x, \quad d \in \mathbb{R}^+$$

$$y = \tilde{c} \cdot e^x, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

Bsp: **AWP:**

$$x + yy' = 0, \qquad y(0) = 2$$

TdV:

$$y' = \frac{-x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2c}_{=C_1}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -x^2 + C_1$$

AB: $y(0) = 2$

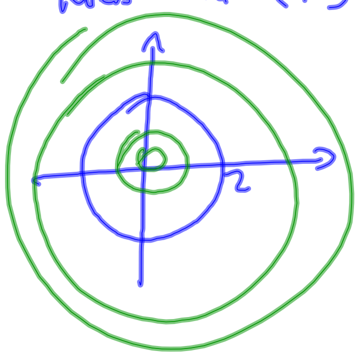
$$4 = 0 + C_1 \Rightarrow \underline{C_1 = 4.}$$

$$y^2_{s_{AWP}} = -x^2 + 4$$

$$\underline{y_s^2 + x^2 = 4}$$

$\Downarrow$

Kreis um $(0,0)$ von Radius 2:



"Trennung der Variablen"

1. Ist die Gl. der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)?$$

Ja $\longrightarrow$ TdV

Nein $\longrightarrow$ Andere Methode

2. Trennung der beiden Variablen

3. Integration auf den beiden Seiten der Gleichung

4. Auflösen der impliziten Gleichung $G(y) = F(x)$ nach y, soweit das geht.

Bsp.: $y' + y^2 = 0$

$$y' = -y^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int dx$$

$$-\frac{1}{y} = -x + c$$

$$y = \frac{1}{x+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x+c}\right)' = \left((x+c)^{-1}\right)' =$$

$$= -(x+c)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x+c)^2}$$

$$y^2 = \left(\frac{1}{x+c}\right)^2 = \frac{1}{(x+c)^2}$$

$$y' + y^2 = -\frac{1}{(x+c)^2} + \frac{1}{(x+c)^2} = 0$$

2.3. Integration einer DGl durch Substitution

$$y' = f(ax+by+c) \quad (2.31)$$

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (2.32)$$

DGl vom Typ (2.31)

$y' = f(ax+by+c)$

$u := ax+by+c$

Dann $u' = a+by'$.

unter Berücksichtigung von

$y' = f(u)$:

$$\boxed{u' = a+bf(u)}$$

separabel $\Rightarrow$ TdV zur Bestimmung von u

$\Rightarrow$ Durch Rücksubstitution $\rightarrow y$

DGl vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$(y = y(x))$:

$u := \frac{y}{x}$, d.h. $y = u \cdot x$

Durch Differenzieren:

$y' = (u \cdot x)' = u' \cdot x + x' \cdot u =$

$= u' \cdot x + u.$

Aber: $y' = f(u)$! Also:

$$\boxed{u' \cdot x + u = f(u)}$$

Separabel $\Rightarrow$ TdV $\rightsquigarrow u$

Rücksubs. $\Big\downarrow$

$y(x)$

Bsp.: $y' = 2x - y$

So nicht separabel

(HA)

$\rightarrow \quad y' = f(ax + by + c)$

$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 0$

$\Rightarrow \quad u = 2x - y;$

$u' = 2 - y' \iff y' = 2 - u'$

Aus Gl.: $y' = u$

$\Rightarrow \quad u = 2 - u'$

$u' = 2 - u;$

$$\frac{du}{2-u} = dx$$

$$\int \frac{du}{2-u} = \int dx$$

HA: $\int$ durch Subs.

$-\ln|2-u| = x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$\ln|2-u| = -x - c$

$|2-u| = e^{-x-c}$

$u = -c_1 \cdot e^{-x} + 2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$

Rück-Subs! „$u = 2x - y$":

$2x - y = -c_1 e^{-x} + 2, \quad c_1 \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{y = 2x - 2 + c_1 e^{-x}}} \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R}$$