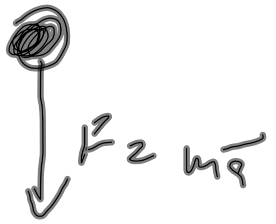
1. Integralrechnung

1.1. Stammfunktion

Bsp: Ein Körper wird losgelassen, ohne Reibung.



$F = -mg$

$v'(t) = a(t)$

$a = -g.$

$f(t) = pt + q$

$f'(t) = p$

Gesucht:

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

V_0 ist noch zu bestimmen.

$V_0 = 0$ nach der Aufgaben:

$$v(t) = -g \cdot t.$$

$$\left(s(t)\right)' = v(t)$$

$$\Downarrow$$

$s(t)$ ist eine quadratische Parabel

$$g(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$g'(t) = 2a_2 t + a_1$$

$$2a_2 t + a_1 = -g \cdot t$$

$$2a_2 = -g;$$

a_1 — war frei wählbar

$$\Longrightarrow$$

$$s(t) = -\frac{g}{2} t^2 + a_1 t + s_0$$

Sei $s_0 = 0$

$a_1 = 0 \qquad v$

$$\Rightarrow s(t) = s_0 + a_1 t + \left(-\frac{g}{2}\right) t^2,$$

Was wir gemacht haben:

Anhand der bekannten Ableitung wurde die Funktion wieder gefunden.

Ist die Funktion eindeutig?

NEIN

Dif. Recnì

$F(x) \Longrightarrow F'(x) = f(x)$

$f(x) \longrightarrow F(x)$?

Integration

$|x|$;

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad x_0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = +1$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1$$

Def 1.1

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** zu der stückweise stetigen Funkt. $f(x)$ auf dem Intervall I, wenn

(i) $F(x)$ ist auf I differenzierbar

(ii) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Bspl.

(i) $f(x) = 1$

$F_1(x) = x$

$F_2(x) = x + 3$

$F_3(x) = x - 3.14$

(ii) $f(x) = \cos(x)$

$\Downarrow$

$F(x) = \sin(x) + C,$

$C \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x$

$\Downarrow$

Für jede $f(x)$ gibt es unendlich viele Stammfunktionen, die sich durch konstanten Summanden unterscheiden.

Im Fall $c = 0$

nennt man die

Stammfunktion

Hauptstammfunktion.

$f(x)$	$F(x)$ (HSF)
x	$\frac{1}{2} x^2$
$a, \; a \in \mathbb{R}$	ax
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos$	$\sin x$
e^x	e^x
$1/x, \; x \neq 0$	$\ln \lvert x \rvert$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{(n+1)}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} x^{3/2}$

u.s.w.

Bsp 1

a) $f(x) = x^5$

$F(x) = \frac{1}{6} x^6$

b) $f(x) = 3 \sin x -$

$- 4 \cos x$

$F(x) = - 3 \cos x -$

$- 4 \sin x$

c) $f(x) = 3 e^{2x} =$

$= 3 \cdot \left(HSF \left(e^{2x} \right) \right) =$

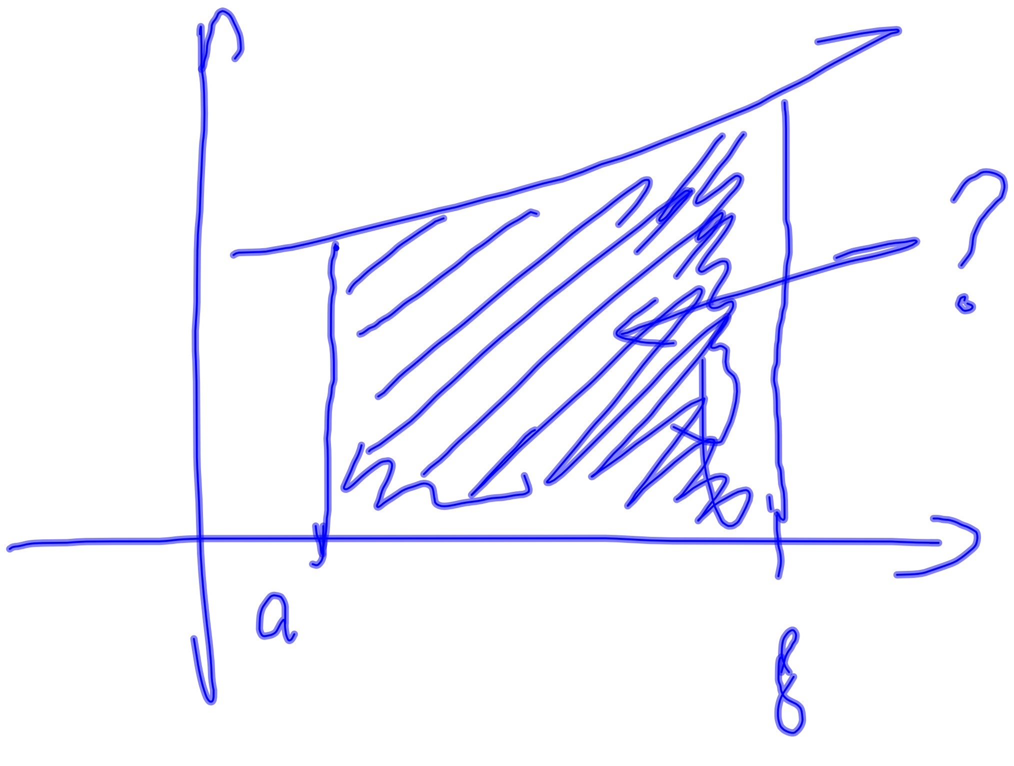
$= 3 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right).$

$F(x) = \frac{3}{2} e^{2x}.$

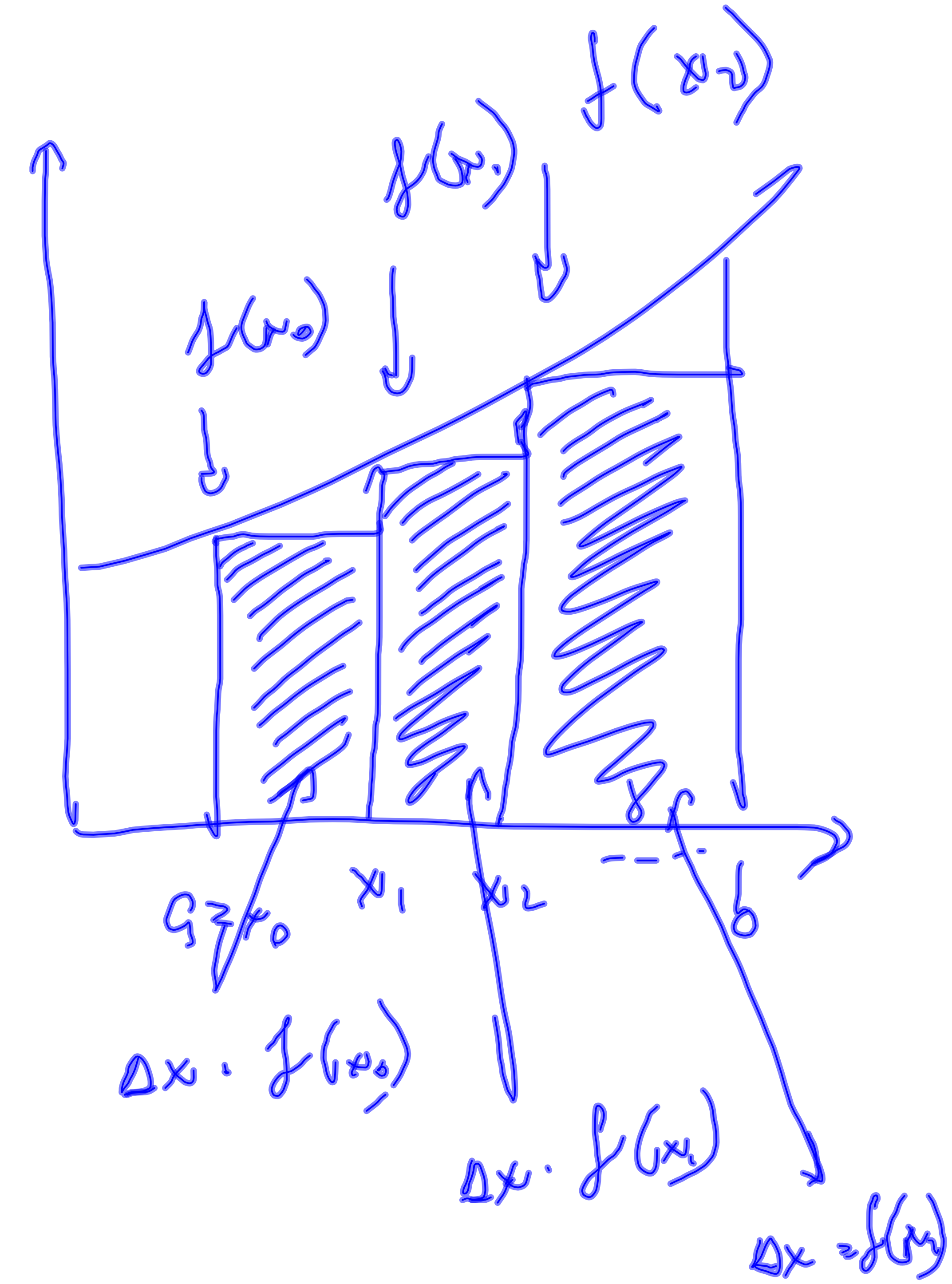
Def: Die Familie aller Stammfunktionen von $f(x)$ nennt man unbestimmtes Integral von $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx := F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.2. Berechnung der durch eine Funktion beschränkten Fläche durch das bestimmte Integral.



Gesucht wird
die Fläche A
zwischen dem Graph
der Funktion $f(x)$
und x-Achse auf
dem Intervall $[a,b]$.
Dazu zerlegen wir
das Intervall $[a,b]$
in kleine Stücke der
Länge Δx, diese Stücke
werden dann mit $f(x_i)$
~~x_i~~ d.h. mit dem "linken"
Funktionswert multipliziert
und die Flächen einzelner
Rechtecke werden aufsummiert



$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$A \geq \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$