Stetige Zufallsgröße

X - stetige ZG

$X = \mathbb{X} \supset [a, b]$

$\mathbb{R} \supset [0, 1]$

1) $0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots\ldots\ldots$ $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

2) $0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots\ldots$

3) $0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots\ldots$

$a_i^i \neq 5 \rightarrow z_i = 5$

$a_i^i = 5 \rightarrow z_i = 0$

$0, z_1 z_2 z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ges: $P(X=a)$

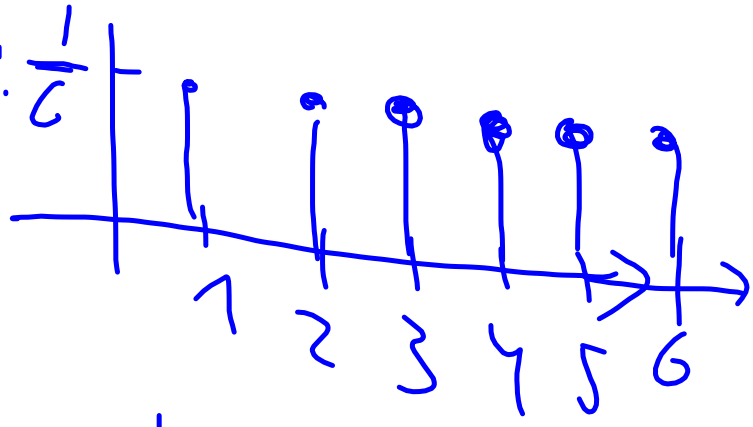
$P(X<a)$

$P(X>a)$

$P(a<X<b)$

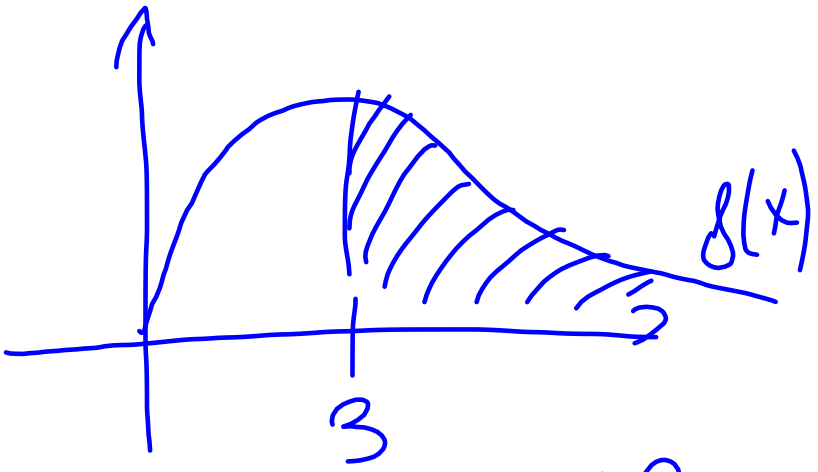
(1) $P(X=a)=0$

Diskr. ZE: $\frac{1}{6}$



$P(X\geq 3)=$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$



$$P(X>3)=\int_{3}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$P(X<3)=\int_{-\infty}^{3} f(x)\,dx$$

$$P(3<X<7)=\int_{3}^{7} f(x)\,dx$$

$$P(X=3)=\int_{3}^{3} f(x)\,dx=$$

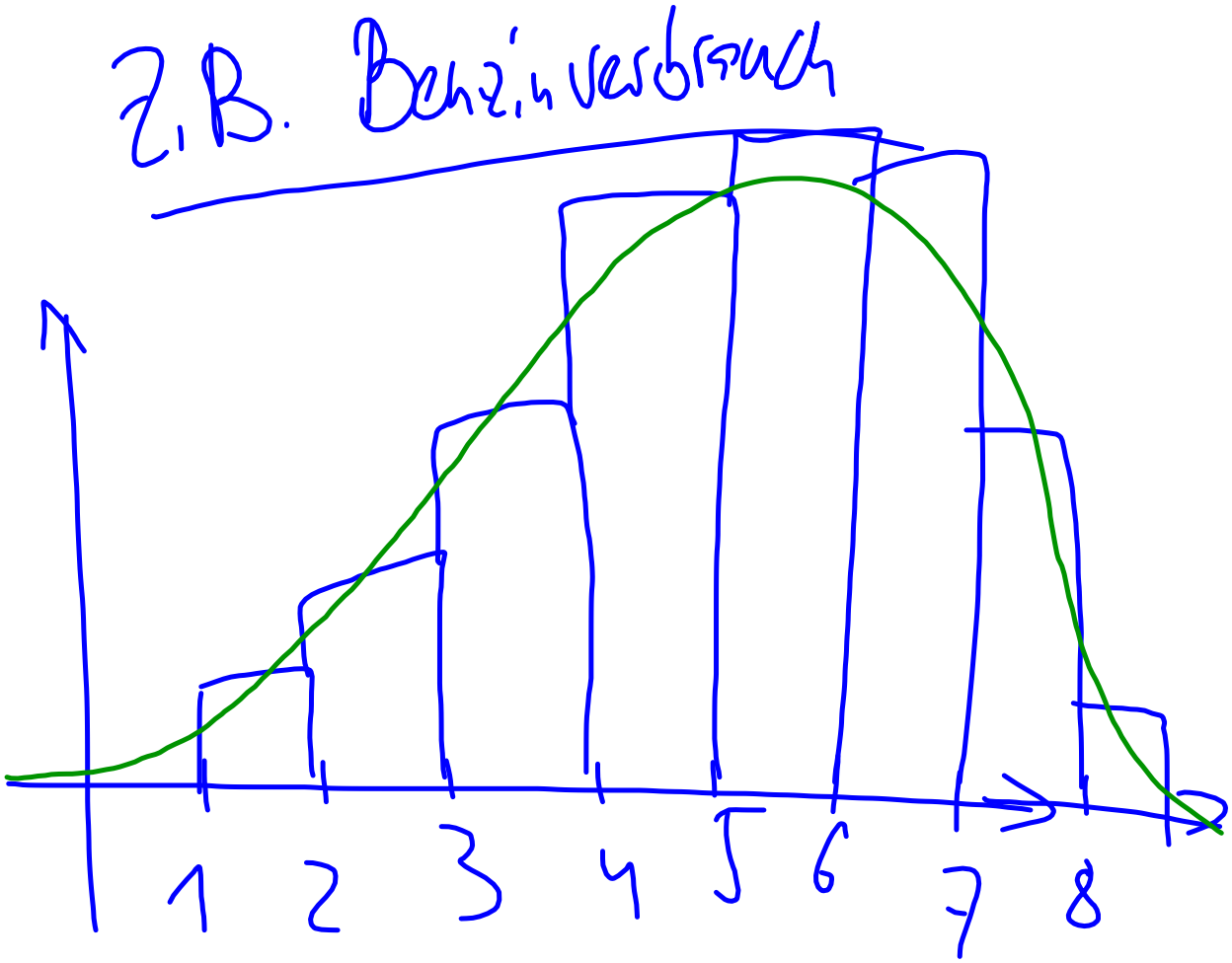
$$=F(3)-F(3)=0$$

Sei X eine stetige ZG.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X wird beschrieben durch die Dichtefunktion $f(x)$ oder die Verteilungsfunktion $F(x)$

Woher kennt die Dichtefunktion?

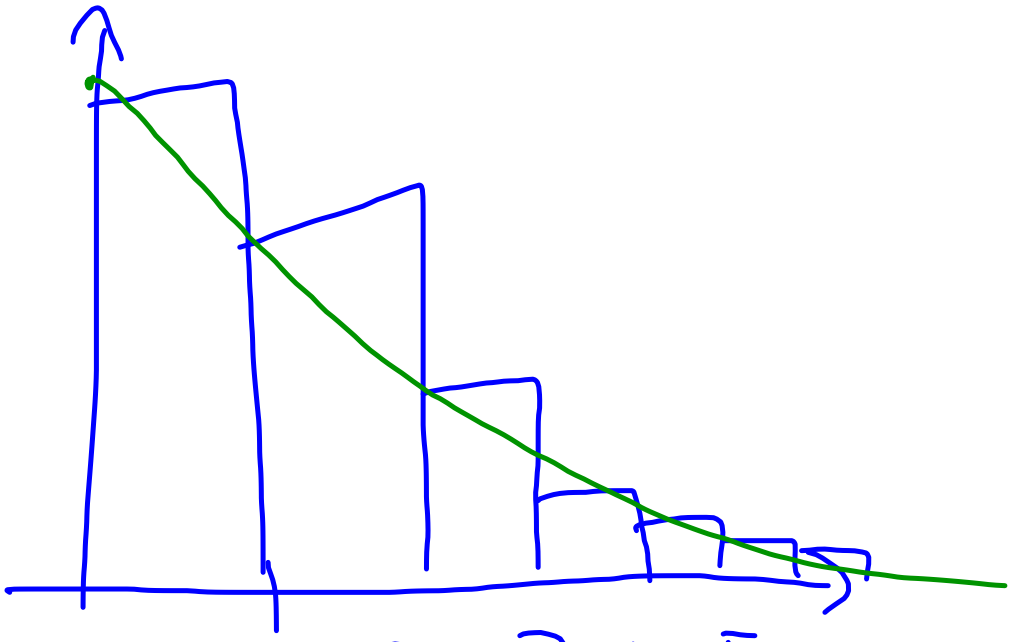
Aus einer Stichprobe

z.B. Benzinverbrauch



Es gibt spezielle Typen von Dichtefunktion, die man mit den Histogramm vergleicht, um Parameter abzuschätzen

z.B. Lebensdauer



$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Die Eigenschaften der Dichtefunktionen:

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $P(X \in \mathbb{R}) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Def: Verteilungsfunktion

ist eine Fktn mit

$F(x) = P(X \leq x)$ falls:

(1) $x \in \chi \Leftrightarrow F(x) \leq 1$

$0 \leq F(x)$

(2) $F(x)$ ist ~~streng~~ monoton wachsend

(3) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(4) $F(x)$ ist stetig

diskrete ZG ⟷ stetige ZG

Wahrscheinlichkeits-Verteilung

W-Vert Dichtefkt

$f(x)$

X	. . .
P_i	- - -

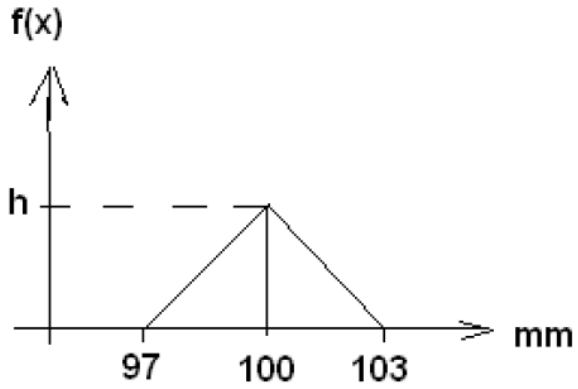
Verteilungsfkt

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P_i$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \leq x)$$

Aufgabe 1

Bei der Herstellung von Wellen sind alle Wellen Ausschuss, die 1mm oder mehr vom Sollmaß von 100mm Länge abweichen. Die zufällig schwankende Länge X genüge einer symmetrischen Verteilung mit der Dichtefunktion



Berechnen Sie

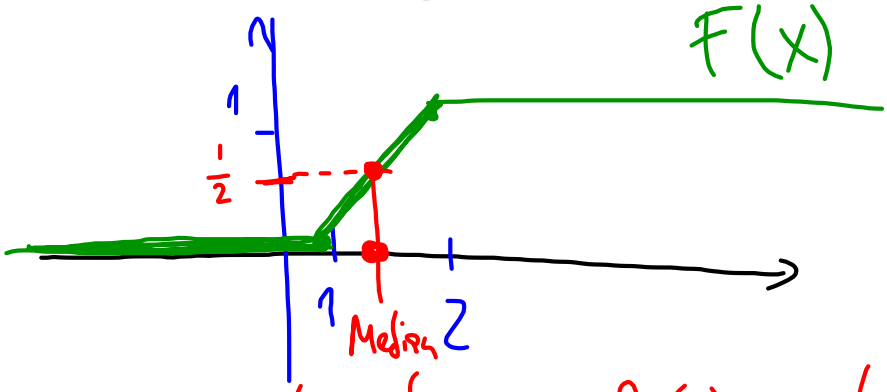
a) Berechnen Sie die Höhe h!
b) Wie groß ist der Ausschussanteil? Skizzieren Sie ihn als Fläche unter der Dichte!
c) In welchem Toleranz-Intervall [100-c, 100+c] liegen 90% aller Wellen? Skizzieren Sie das Intervall als Fläche unter der Dichte!

Aufgabe 2

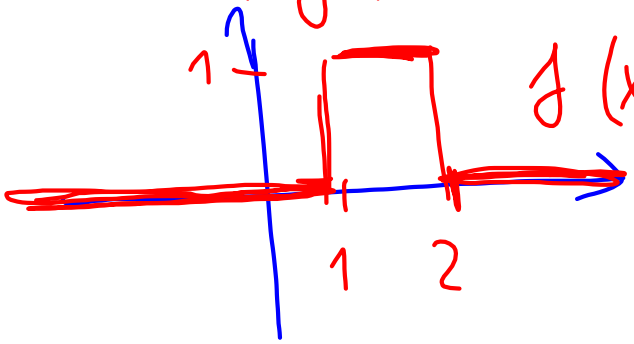
Die Verteilungsfunktion F(x) der zufälligen Entladezeit X (in Stunden) eines Akkus vom Types EC2100 hat folgende Gestalt:

Sei $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ x-1 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X.

a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F(x)!
b) Berechnen und skizzieren Sie die Dichtefunktion f(x)!
c) Wieviel % aller Akkus des Typs EC2100 entladen sich nach mindestens 1,5h?
d) Berechnen Sie die Entladezeit, die 50% aller Akkus überschreiten!
e) Berechnen Sie die mittlere Entladezeit EX und den Median von X!
f) Berechnen Sie die Varianz Var(X)!
g) Berechnen Sie $P(1{,}1 < X < 1{,}7)$, $P(X > 1{,}1)$ und $P(X < 1{,}7 \mid X > 1{,}1)$ und stellen Sie diese Wahrscheinlichkeiten grafisch anhand der Dichtefunktion dar!



Verteilungsdichte: $f(x) = F'(x)$



$f(x) = \begin{cases} 0, \dots \\ 1, \dots \\ 0, \dots \end{cases}$

c) $P(X \ge 1{,}5) = 1 - F(1{,}5) =$

$= 1 - (1{,}5 - 1) = 0{,}5$

50%

Parameter stetiger Verteilungen

Erwartungswert

$$EX = E(X)$$

diskret

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

stetig

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Varianz

diskret

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

stetig

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)\, dx$$

Standardabweichung

$$S = \sqrt{Var}$$

Aufgabe 2

e) Berechnen Sie die mittlere Entladezeit EX
f) Berechnen Sie die Varianz Var(X)!

e) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$

$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{1}^{2} x \cdot 1\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{2} = 1{,}5.$

f) $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx =$

$= \int_{1}^{2} (x - 1{,}5)^2\,dx = \frac{1}{3}(x - 1{,}5)^3\Big|_{1}^{2} =$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{12}$

$S = \sqrt{1/12} = \frac{1}{2}\sqrt{1/3} \approx 0{,}29$

Quantile stetiger Verteilungen

Def.: Sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion F(x) und Verteilungsdichte f(x).

Der Wert $x_\alpha \in X$, für den gilt: $F(x_\alpha) = \alpha$ bzw. $\int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx = P(X \le x_\alpha) = \alpha$ heißt *(unteres)* α*–Quantil.*

Aufgabe 2

e) den Median von X!

$F(x) = \frac{1}{2}$ $F(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $\frac{1}{2} = x-1 \Rightarrow x = 1{,}5$

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Aufgabe 3

Sei X die zufällige Dauer von Telefongesprächen und sei die Dichte von X durch $f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$ gegeben.

a) Wie groß ist die mittlere Gesprächsdauer?
b) Welche Zeit überschreiten 80 % der Gespräche nicht?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die zufällige Gesprächsdauer > 10 min ist? (Wie groß ist der Anteil aller Gespräche, die länger als 10 min. dauern?)

$$(a)\ EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx =$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx=\frac{1}{5}\int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{1}{5}x}\,dx \quad (=)$$

$$\int x e^{-\frac{1}{5}x}\,dx=-5xe^{-\frac{1}{5}x}+5\int e^{-\frac{1}{5}x}\,dx=$$

$$\int uv'=uv-\int u'v \qquad =-5\left[xe^{-\frac{1}{5}x}+5e^{-\frac{1}{5}x}\right]+C$$

$$x=u \quad e^{-\frac{1}{5}x}=v' \qquad =-5e^{-\frac{1}{5}x}\left[x+5\right]+C$$

$$dx=du \quad v=-5e^{\frac{1}{5}x}$$

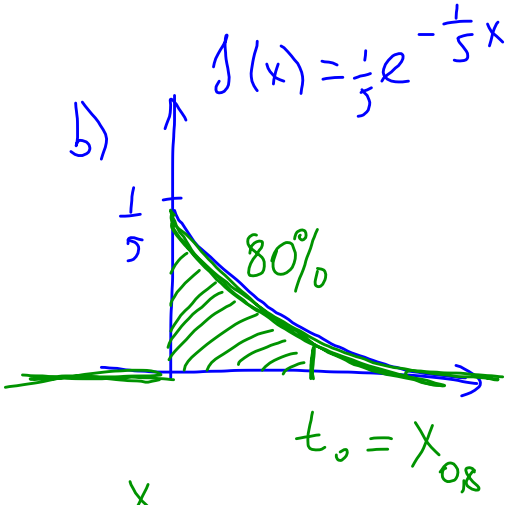
$$x'=1$$

$$(=)\ -e^{-\frac{1}{5}x}\left[x+5\right]\Big|_0^{\infty}=$$

$$=-xe^{-\frac{1}{5}x}\Big|_0^{\infty}-5e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=(0-0)-(0-5)=5$$

b)



$$\int_0^{x_{0,8}} f(x)\,dx = 0,8$$

$$\int_0^{x_{0,8}} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = 0,8$$

$$-e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_0^{x_{0,8}} = 0,8$$

$$-e^{-\frac{1}{5}x_{0,8}} + 1 = 0,8$$

$$e^{-\frac{1}{5}x_{0,8}} = 0,2$$

$$x_{0,8} = -5 \ln 0,2 = 8,047$$

80% der Gespräche dauern nicht länger als 8,047 min

c) $P(X>10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,dx$

$= 1 - P(X \le 10) =$

$= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx =$

$= 1 - \left(-e^{-\frac{1}{5}x} \Big|_0^{10} \right) =$

$= 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} = 0{,}14$

Besser: Verteilungsfunktion:

$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{5}x}, \quad x > 0$

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{5}x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

X - stetig oder diskret

Erwartungswert

1) $E(a \cdot X) = a \cdot EX$

Bsp.1: Die zufällige Dauer eines Telefongespräches ist wie in Aufgabe 3 verteilt. Innerhalb von 3 Stunden führt eine Person 5 Telefongespräche. Wie lange telefoniert sie im Mittel insgesamt?

$E(5 \cdot X) = 5 \cdot EX = 5 \cdot 5\,min = 25\,min$

2) $E(a) = a$

3) $E(X+Y) = EX + EY$

Bsp.2: Ein Hamburger besteht aus einem Brötchen und einer Frikadelle. Das Brötchen ist durchschnittlich 5 cm dick und die Frikadelle 2 cm. Wie groß ist de Hamburger im Mittel?

$E(X+Y) = EX + EY = 5 + 2 = 7\,cm$

4) $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ (falls X und Y stoch. unabhängig)

Seien X, Y diskret $X = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ $Y = \{b_1, \dots, b_\ell\}$

$Z = X \cdot Y$

$Z = \{a_i \cdot b_j ; i = 1, \dots, k ; j = 1, \dots, \ell\}$ $P(X=a_i) \cdot P(Y=b_j) = P(X=a_i \wedge Y=b_j)$

$$EZ = E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} a_i \cdot b_j \cdot P(a_i \cdot b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} a_i \cdot b_j \, P(X=a_i) \cdot P(Y=b_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[a_i \cdot P(X=a_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\ell} b_j \cdot P(Y=b_j) \right) \right] =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\ell} b_j \cdot P(Y=b_j) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P(X=a_i) \right) =$$

$$= EX \cdot EY$$

Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

X - stetig oder diskret

Varianz $\left(\mathrm{Var}(X) = E\left(X - EX\right)^2\right)$

1) $\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - (EX)^2$, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$

2) $\mathrm{Var}(c) = 0$

3) $\mathrm{Var}(cX) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$

4) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

5) $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y)$

Bsp.1: X - Zufg. Gr.: $EX = \mu$; $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$;

$E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) =$

$= E\left(\frac{1}{\sigma}X\right) + E\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}EX + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) =$

$= \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \mathrm{Var}(X) =$

$= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Def: Eine ZG Y mit $EY = 0$ und $\mathrm{Var}(Y) = 1$ heißt Standardisierte ZG.

Die Transform: $X \longrightarrow \frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X}}$

heißt Standardisierung (Standardisierungs-transformation) einer ZG X.

(affine Transf.) (Umkehrbar; wichtig! ↪ Tabelle)

Die Tschebyscheff-Ungleichung

Satz: Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} \text{a) } P\left(\left(|X - EX|\right) > \varepsilon\right) &\le \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \\ \text{b) } P\left(\left(|X - EX|\right) \le \varepsilon\right) &\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}\right\} \forall\, \varepsilon > 0$$

Beispiel 34: Produktion von Schrauben (∅ = 5mm [illegible])
X – zufälliger Schraubendurchmesser

Es gilt: EX = 5 mm und Var X = 0,0025 mm^2

Ausschuß: Jede Schraube, die um mehr als 0,12 mm vom EX abweicht.

Ges.: Ausschußrate der Produktion

$$P(4{,}88 \le X \le 5{,}12) =$$
$$= P(|X - 5\,\text{mm}| \le 0{,}12) =$$
$$= P(|X - EX| \le 0{,}12) \qquad \varepsilon = 0{,}12 \text{ T-Ungl.}$$
$$\left(1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}\right) = 1 - \frac{0{,}0025}{(0{,}12)^2} = 1 - \frac{0{,}0025}{0{,}0144}$$
$$= 0{,}826$$

↪ 82,6% haben $\emptyset \in [4{,}88; 5{,}12]$

$\Longrightarrow$ 17,4% aller Schrauben sind "defekt".

Übungsaufgaben Skript S. 40, Nr. 1,2,3