Wiederholung zu Matrizen

Dr. Stefan Krause

5. November 2020

1 Grundlegendes

Matrizen, Vektoren, Skalare

Eine reelle Matrix ist ein rechteckiges Schema reeller Zahlen

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der erste Index ist der Zeilenindex (hier i), der zweite der Spaltenindex (hier k). Die Matrix A besteht aus m Zeilen und n Spalten. Man spricht daher von einer $m \times n$-Matrix und nennt $m \times n$ die Größe der Matrix. Die $m \cdot n$ Zahlen a_{ik}, wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq k \leq n$, heißen die Einträge der Matrix. Die Einträge $a_{11}, a_{22}, \ldots$, also diejenigen mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex, heißen die Diagonaleinträge der Matrix. Die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen bezeichnet man auch mit $\mathbb{R}^{m \times n}$. Ein Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \tag{1}$$

Ist $m = 1$, d. h. besteht die Matrix nur aus einer Zeile, so nennt man sie einen Zeilenvektor. Die Menge aller Zeilenvektoren (der Länge n) ist dann $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Jede Zeile der Matrix in (1) ist ein Zeilenvektor der Länge 3, und zwar

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}.$$

Häufig werden Zeilenvektoren auch durch Komma getrennt geschrieben, also $(3, 0, -1)$ oder $(4, -2, 7)$.

Ist $n = 1$, d. h. besteht die Matrix nur aus einer Spalte, so nennt man sie einen Spaltenvektor. Die Menge aller Spaltenvektoren (der Länge m) ist dann $\mathbb{R}^{m \times 1}$, was üblicherweise zu $\mathbb{R}^m$ abgekürzt wird. Jede Spalte der Matrix in (1) ist ein Spaltenvektor der Länge 2, und zwar

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wenn im physikalisch-technischen Kontext nur von „Vektoren“ gesprochen wird, sind in der Regel Spaltenvektoren gemeint. Auch wenn es der Einfachheit halber häufiger gemacht wird, sollte man Spaltenvektoren nicht nebeneinander (als Zeile) schreiben.

Für die Einträge von Vektoren verwendet in der Regel nur einen Index, weil der andere ohnehin immer 1 wäre. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} = \mathbb{R}^2\,, \qquad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}\,.$$

Die Vektoren (= Spaltenvektoren) werden in der Physik/Technik durchgängig mit Vektorpfeil markiert, d. h. der links stehende Vektor zum Beispiel als $\vec{b}$. Die Einträge von Vektoren nennt man auch Komponenten.

Ist $m = n = 1$, so spricht man von Skalaren. In den meisten Fällen sagt man natürlich einfach „reelle Zahl".

Transponierte

Ist A eine Matrix, so heißt A^{T} die transponierte Matrix oder die Transponierte von A. Sie entsteht, indem die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden. Es gilt also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile von A^{T} enthält also die Einträge der ersten Spalte von A, die dritte Spalte von A^{T} diejenigen der dritten Zeile von A usw. Man kann sich die Transponierte auch einfach an den Diagonaleinträgen $a_{11}, a_{22}, \ldots$ gespiegelt vorstellen. Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist aufgrund des Vertauschens A^{T} eine $n \times m$-Matrix. Für die Matrix in (1) gilt

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}\,.$$

Ist A ein Zeilenvektor der Länge n, so ist A^{T} ein Spaltenvektor der Länge n, und analog umgekehrt. Da Größen mit Vektorpfeil, also z. B. $\vec{c}$, konventionsgemäß Spaltenvektoren sind, benennt man Zeilenvektoren häufig einfach durch einen transponierten Spaltenvektor, also z. B. $\vec{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, c_3)$. Andersherum schreibt man oft Spaltenvektoren als transponierte Zeilenvektoren, um Platz zu sparen, z. B. $\vec{b} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$.

Meistens bezeichnen Großbuchstaben Matrizen und Kleinbuchstaben mit Vektorpfeil Spaltenvektoren. Kleinbuchstaben ohne Pfeil sind dann in der Regel Skalare, also einfach Zahlen. Transponieren bewirkt bei ihnen natürlich nichts, d. h. $d^{\mathrm{T}} = d$.

Addition und Skalarmultiplikation

Sind A und B Matrizen gleicher Größe $m \times n$, so ist die Addition eintragsweise definiert, d. h.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Summe $A + B$ hat natürlich wieder die Größe $m \times n$. Mit einer zweiten Beispielmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

und A aus (1) ist dann
$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}\,.$$

Sind A eine $m \times n$-Matrix und s ein Skalar (also eine Zahl), so ist die Skalarmultiplikation ebenfalls eintragsweise definiert, d. h.
$$s \cdot A = sA = s \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{11} & \cdots & sa_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ sa_{m1} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix sA hat wieder die Größe $m \times n$. Mit den Beispielmatrizen gilt z. B.
$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 20 & -10 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}\,, \quad -2B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 8 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}\,.$$

Die Nullmatrix ist diejenige Matrix, deren Einträge alle 0 sind. Meist wird sie einfach als 0 (oder auch O) notiert. Sie ist das neutrale Element der Addition, also $A + 0 = A$. Die Matrix $-A = (-1) \cdot A$ ist das additive Inverse von A, denn offenbar ist $A + (-A) = 0$. Mit ihr kann man eine Differenz $A - B = A + (-B)$ einfach durch eintragsweises Subtrahieren definieren. Mit den Beispielmatrizen gilt
$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}\,.$$

Sofern die Matrizen von ihrer Größe zusammenpassen, gelten alle zu erwartenden Rechenregeln, darunter Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, z. B.
$$A + B = B + A\,, \quad (st)A = s(tA)\,, \quad (s+t)A = sA + tA\,, \quad s(A+B) = sA + sB \quad \text{usw.}$$

Außerdem gilt
$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}\,, \quad (sA)^{\mathrm{T}} = s\,A^{\mathrm{T}}\,.$$

Alle Definitionen und Regeln gelten selbstverständlich auch im Spezialfall von Vektoren, indem man A und B z. B. durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ersetzt. Für den Nullvektor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ ist es üblich, eine Null mit Vektorpfeil zu schreiben.

Matrizenprodukt

Seien A eine $m \times p$- und B eine $q \times n$-Matrix, also
$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B = (b_{jk}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $A \cdot B$ dieser beiden Matrizen ist aber nur dann definiert, wenn $p = q$ gilt, also wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix (hier p) gleich der Zeilenanzahl der rechten Matrix (hier q) ist. In diesem Fall entsteht eine Produktmatrix $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit m Zeilen (genauso viele wie die linke Matrix) und n Spalten (genauso viele wie die rechte Matrix). Als symbolische Merkhilfe gilt
$$„\,(m \times p) \cdot (p \times n) = m \times n\,“\,.$$

Die Einträge (c_{ik}) der Produktmatrix $C = A \cdot B$ berechnen sich zu

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} \,, \quad 1 \leq i \leq m \,, \quad 1 \leq k \leq n \,.$$

Für festgehaltene Indizes i und k werden also die Einträge $a_{i1}, \ldots, a_{ip}$ der i-ten Zeile von A mit den Einträgen $b_{1k}, \ldots, b_{pk}$ der k-ten Spalte von B miteinander verrechnet. Wir definieren eine neue Beispielmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,.$$

Weil A aus (1) drei Spalten und B zwei Zeilen besitzt, ist das Produkt $A \cdot B$ nicht definiert. Andersherum, also $D = B \cdot A$, funktioniert es hingegen, weil B zwei Spalten und A zwei Zeilen hat. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} D = BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 7 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 4 & 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 15 & -6 & 20 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wie man sieht, gilt hier kein Kommutativgesetz; BA ist definiert und AB nicht. Wenn die Matrizen von ihrer Größe her zusammenpassen, gilt jedoch das Assoziativgesetz

$$(AB)C = A(BC) \,.$$

Alle anderen zu erwartenden Regeln gelten, sofern man keine Matrizen vertauscht, z. B. ist $s(AB) = (sA)B = (As)B = A(sB) = A(Bs) = (AB)s$ usw. Mit der Transponierten ergibt sich die wichtige Regel

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \,.$$

Man beachte die Vertauschung der Faktoren!

2 Lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

Lineare Unabhängigkeit

Seien die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_N$ des $\mathbb{R}^n$ gegeben. Für Skalare $s_1, \ldots, s_N$ heißt der Vektor

$$s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \ldots + s_N\vec{v}_N = \sum_{k=1}^{N} s_k \vec{v}_k$$

eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_N$. Sie ist natürlich wieder ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$. Die Skalare $s_1, \ldots, s_N$ heißen die Koeffizienten der Linearkombination. Offenbar entsteht der Nullvektor, wenn alle Skalare zu 0 gewählt werden, weil ja $0\vec{v}_1 + \ldots + 0\vec{v}_N = \vec{0}$. Interessant ist die Frage, ob der Nullvektor entstehen kann, auch wenn nicht alle Skalare zu 0 gewählt werden. Deshalb definieren wir:

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_N$ heißen linear unabhängig, wenn die Folgerung

$$\sum_{k=1}^{N} s_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad s_1 = \ldots = s_N = 0$$

erfüllt ist. Anders formuliert: Die Vektoren heißen linear unabhängig, wenn ihre Linearkombination nur dann den Nullvektor ergibt, wenn alle Koeffizienten zu 0 gewählt werden. Ansonsten heißen die Vektoren linear abhängig.

Wir wollen prüfen, ob die Spaltenvektoren der Matrix A aus (1) linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$s_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die obere Gleichung $3s_1 + 0s_2 + (-1)s_3 = 0$ bedeutet $s_3 = 3s_1$. Eingesetzt in die untere Gleichung $4s_1 + (-2)s_2 + 7s_3 = 0$ ergibt sich $0 = 4s_1 - 2s_2 + 21s_1 = 25s_1 - 2s_2$ mit einer möglichen Lösung $s_1 = 2$, $s_2 = 25$ und weiter $s_3 = 6$. Daher ist die Linearkombination

$$2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

der Nullvektor und die drei Vektoren sind linear abhängig. Das hätte man ohne Rechnung schon wissen können, dann es gilt:

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N \in \mathbb{R}^n \text{ sind immer linear abhängig, wenn } N > n\,.$$

Wir prüfen nun, ob die Zeilenvektoren dieser Matrix linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$s_1 \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das entspricht den drei Gleichungen $3s_1 + 4s_2 = 0$, $0s_1 + (-2)s_2 = 0$ und $(-1)s_1 + 7s_2 = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $s_2 = 0$ und mit einer der anderen dann auch $s_1 = 0$. Die beiden Vektoren sind also linear unabhängig.

Rang einer Matrix

Eine $m \times n$-Matrix besteht aus n Spaltenvektoren der Länge m. Im Allgemeinen werden diese Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ aus dem $\mathbb{R}^m$ nicht linear unabhängig sein. Wenn man aber nicht alle n, sondern nur ein paar von ihnen anschaut, ist dieser Teil vielleicht linear unabhängig. Als Beispiel nehmen wir wieder die Spaltenvektoren von A aus (1), die linear abhängig sind. Wir betrachten diesmal aber nur die ersten beiden, also

$$s_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen sofort, dass aus der oberen Gleichung $s_1 = 0$ und aus der unteren dann $s_2 = 0$ folgt, d. h. diese beiden Spalten sind linear abhängig. Da ihre drei Spalten nicht linear unabhängig sind, zwei geeignet ausgewählte hingehen schon, ist der Spaltenrang dieser Matrix gleich 2. Die allgemeine Definition dazu lautet:

Für eine $m \times n$-Matrix sei:

$$\text{Spaltenrang von } A = \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von } A\,.$$

Diese Anzahl kann leicht z. B. mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens bestimmt werden. Dabei kommt es in der Regel nicht darauf an, welche Spalten ausgewählt werden (müssen) oder wie die möglichen Linearkombinationen linear abhängiger Spalten aussehen.

Eine $m \times n$-Matrix besteht aber auch aus m Zeilenvektoren der Länge n. Von der Matrix A aus (1) haben wir gesehen, dass alle (also die beiden) Zeilenvektoren linear abhängig sind. Wir definieren hier analog allgemein:

$$\text{Zeilenrang von } A = \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von } A\,.$$

Auch diese Anzahl kann mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens bestimmt werden.

Bei der Matrix A aus (1) sind Spalten- und Zeilenrang beide gleich 2. Es ist zunächst überhaupt nicht offensichtlich, dass beide Ränge bei jeder beliebigen Matrix gleich sind. Da dies aber so ist, definieren wir für eine $m \times n$-Matrix A den Rang:

$$\text{Rang}(A) = \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten/Zeilen von } A\,.$$

Da der Spaltenrang höchstens m und der Zeilenrang höchstens n sein kann, erhalten wir

$$\text{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}\,.$$

Da die Matrix A aus (1) eine 2×3-Matrix ist, kann ihr Rang höchstens 2 sein, was er, wie berechnet, auch ist.

Lineare Gleichungssysteme, Gaußsches Eliminationsverfahren

Sind A eine $m \times n$-Matrix und $\vec{b}$ ein Spaltenvektor mit m Komponenten, dann heißt

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ein lineares Gleichungssystem für den unbekannten Spaltenvektor $\vec{x}$. Damit das links stehende Produkt definiert ist, muss $\vec{x}$ aus den n unbekannten Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ bestehen. Wenn man das Matrizenprodukt ausführt, erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat also genau dann eine Lösung $\vec{x}$, wenn die rechte Seite $\vec{b}$ linear abhängig von den Spalten von A ist.

Da es sich bei einem linearen Gleichungssystem lediglich um untereinander geschriebene Gleichungen handelt, kann man selbstverständlich Zeilen (d. h. Gleichungen) vertauschen. Und man kann, Äquivalenzumformungen von „normalen“ Gleichungen entsprechend, ein beliebiges s-fache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Das ist die wichtigste Umformung beim Gaußschen Eliminationsverfahren, um das System zu lösen. Außerdem kann man eine Gleichung mit $s \neq 0$ multiplizieren, ohne die Lösung zu verändern. Als Beispiel bilden wir mit der Matrix A aus (1) und dem Vektor $\vec{b} = (5, -2)^{\mathrm{T}}$ das System

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & -2 \end{array}\right),$$

wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ drei Komponenten haben muss.

Nach geeigneten Umformungen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 25 & -2 & 0 & 33 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & -5 \\ -12{,}5 & 1 & 0 & -16{,}5 \end{array}\right).$$

Wählt man nun $x_1 = s_1$ beliebig, so erhält man aus der ersten Zeile $x_3 = -5 + 3s_1$ und aus der zweiten $x_2 = -16{,}5 + 12{,}5s_1$. Die allgemeine Lösung des Systems lautet also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -16{,}5 + 12{,}5s_1 \\ -5 + 3s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16{,}5 \\ -5 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 12{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung ist natürlich nicht eindeutig. Ersetzt man z. B. $s_1 = 1 + 2s'$, so erhält man

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16{,}5 \\ -5 \end{pmatrix} + (1 + 2s') \begin{pmatrix} 1 \\ 12{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Rangberechnung

Wir betrachten eine neue Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wie beim Lösen von Gleichungssystemen kann man auch hier Zeilenumformungen (und auch analoge Spaltenumformungen) durchführen, um die gegebene Matrix in eine einfachere Matrix mit demselben Rang zu überführen. Wir erhalten hier

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schon hier ist klar, dass $\mathrm{Rang}(A) = 2$ gilt, da es zwei linear unabhängige Zeilen gibt.

Man kann aber auch noch weiter umformen, so dass man mit

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine noch einfachere Matrix erhält. Man kann zeigen, dass jede Matrix durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf diese Form gebracht werden kann. Ist nämlich $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r$, so gilt

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

Darin ist I_r dir $r \times r$-Einheitsmatrix. Sie besitzt Einsen auf der Diagonalen und sonst nur Nullen als Einträge.

Wir betrachten noch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dann erhalten wir durch Zeilenumformungen

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat offenbar Rang 3. Alle drei Spalten der Matrix sind linear unabhängig, und genauso sind es dann auch alle ihre drei Zeilen.

Inverse Matrix

Zu einer gegebenen $n \times n$-Matrix A heißt eine ebenso große Matrix B die Inverse bzw. inverse Matrix von A, wenn $AB = BA = I_n$ (mit der $n \times n$-Einheitsmatrix) gilt. Sind $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ die Spalten von B und $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ die Spalten von I_n, die auch die Standard-Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ heißen, so ist $AB = I_n$ äquivalent zu

$$A \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet aber $A\vec{b}_k = \vec{e}_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Also müssen alle diese n linearen Gleichungssysteme lösbar sein, d. h. jedes $\vec{e}_k$ lässt sich als Linearkombination der Spalten von A darstellen. Das bedeutet, dass A Rang n haben muss.

Also gilt: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie den maximal möglichen Rang n besitzt. In diesem Fall ist die Inverse von A eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet. Nach Definition ist dann $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Weitere Regeln sind

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad (sA)^{-1} = \frac{1}{s}A^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Man beachte wieder die Vertauschung der Faktoren. Tatsächlich hat AB ebenfalls Rang n, wenn A und B beide Rang n haben. Für invertierbare A und B ist also auch AB invertierbar. Für $(A+B)^{-1}$ gibt es keine Regel; hier ist $A + B$ im Allgemeinen nicht invertierbar, auch wenn A und B sind; wähle z. B. $B = -A$.

Die inverse Matrix kann berechnet werden, indem die oben genannten n linearen Gleichungssysteme simultan mit Gauß-Elimination gelöst werden. Dieses Verfahren nennt man auch Gauß-Jordan-Algorithmus. Wir führen das für die Matrix B aus (3) durch und erhalten

$$\begin{aligned}
\big(B \mid I_3\big) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Da links das Dreifache der Einheitsmatrix steht, ist die Matrix rechts das Dreifache der gesuchten Inversen, also

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

3 Determinanten

Definition

Die Determinante ordnet einer quadratischen Matrix einen Skalar zu, d. h. für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\det(A) \in \mathbb{R}$. Sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ die Spalten von A, dann fordern wir: Die Determinante ist multilinear, also linear in jeder Spalte k, d. h. für zwei Skalare s und t und zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt

$$\begin{aligned}&\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}\,,\ s\vec{b} + t\vec{c},\ \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\ &\qquad = s\,\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}\,,\ \vec{b},\ \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n\bigr) + t\,\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}\,,\ \vec{c},\ \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\,.\end{aligned}$$

Die Determinante ist alternierend, d. h. für je zwei Spaltenindizes $k < \ell$ gilt

$$\begin{aligned}&\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}\,,\ \vec{a}_k\,,\ \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_{\ell-1}\,,\ \vec{a}_\ell\,,\ \vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\ &\qquad = -\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}\,,\ \vec{a}_\ell\,,\ \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_{\ell-1}\,,\ \vec{a}_k\,,\ \vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\,.\end{aligned}$$

Die Determinante ist normiert in dem Sinne, dass

$$\det(I_n) = 1\,.$$

Diese Eigenschaften definieren die Determinante eindeutig. Es stellt sich heraus, dass auch beide genannten Regeln für die Zeilen gelten, d. h. die Determinante ist linear in jeder Zeile und sie wechselt das Vorzeichen beim Vertauschen zweier Zeilen. Da also die Zeilen dieselbe Rolle wie die Spalten spielen, gilt demzufolge

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)\,.$$

Häufig werden bei ausgeschriebenen Matrizen senkrechte Striche als Abkürzung für die Determinante geschrieben, siehe das folgende Beispiel.

Für die Matrix B aus (3) bedeutet die Linearität für die zweite Spalte z. B.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&0&10\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&0&3\\4&5&6\\7&0&10\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&0&3\\4&0&6\\7&8&10\end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix}1&1&3\\4&0&6\\7&0&10\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1&0&3\\4&1&6\\7&0&10\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix}1&0&3\\4&0&6\\7&1&10\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Vertauschen zweier Spalten bzw. zweier Zeilen erlaubt beispielsweise

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2&1&3\\5&4&6\\8&7&10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}8&7&10\\5&4&6\\2&1&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}8&7&10\\2&1&3\\5&4&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}10&7&8\\3&1&2\\6&4&5\end{vmatrix}.$$

Die „Transponieren-Regel" besagt

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&10\end{vmatrix}.$$

Eigenschaften

Aus der Eigenschaft alternierend folgt, dass die Determinante gleich 0 ist, wenn zwei Spalten (bzw. Zeilen) gleich sind, also

$$\det\big(\ldots,\vec{b},\ldots,\vec{b},\ldots\big) = 0\,.$$

Aufgrund der Multilinearität reicht es aus, wenn die Spalten (bzw. Zeilen) Vielfache voneinander sind, also

$$\det\big(\ldots,s\vec{b},\ldots,t\vec{b},\ldots\big) = st\det\big(\ldots,\vec{b},\ldots,\vec{b},\ldots\big) = 0\,.$$

Daraus ergibt sich der folgende wichtige Satz: Sind die Spalten (bzw. Zeilen) linear abhängig, so ist die Determinante gleich 0, und es gilt sogar die Umkehrung, also für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{die Spalten von } A \text{ sind linear unabhängig im } \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{die Zeilen von } A \text{ sind linear unabhängig im } \mathbb{R}^{1\times n} \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rang}(A) = n\,. \end{aligned}$$

Diese Regel besagt, dass man beim Berechnen von Determinanten so ähnlich vorgehen kann wir bei der Gauß-Elimination. Dies beschreiben wir im nächsten Abschnitt genauer. Vorher diskutieren wir noch ein paar weitere nützliche Eigenschaften. Wenn es sich um eine Diagonalmatrix handelt, d. h. alle Einträge außerhalb der Diagonalen sind 0, dann gilt mit der Linearität in jeder Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,.$$

Eine Dreiecksmatrix, d. h. oberhalb oder unterhalb der Diagonalen stehen nur Nullen, kann mit Gauß-Elimination auf Diagonalgestalt überführt werden, wodurch sich die Diagonaleinträge nicht ändern. Daher gilt

$$\det\big(\text{Dreiecksmatrix}\big) = \text{Produkt der Diagonaleinträge}\,.$$

Etwas überraschend ist der Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)\,.$$

Hier haben beide Matrizen die Größe $n \times n$. Die Determinanten von AB und BA können jedoch verschieden sein, wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist, z. B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(AB) = \big|2\big| = 2 \neq \det(BA) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Für die Determinante eines Vielfaches einer Matrix gilt

$$\det(sA) = \det(sI_n \cdot A) = \det(sI_n)\det(A) = s^n\det(A)\,.$$

Berechnung

Wir betrachten zunächst kleine Matrizen. Für $n = 1$ ist jede Matrix diagonal, also

$$\det(A) = \left|a_{11}\right| = a_{11}\,.$$

Die Determinante einer 1×1-Matrix ist also gleich ihrem einzigen Eintrag. Für $n = 2$ ist

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{12} \cdot 1 \cdot \left(\frac{a_{22}}{a_{12}} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Diese Herleitung ist natürlich nur korrekt, falls $a_{11} \neq 0$ und $a_{12} \neq 0$. Sobald jedoch irgendein Eintrag gleich 0 ist, liegt immer (notfalls nach Vertauschen der Spalten oder Zeilen) eine Dreiecksmatrix vor. Man erkennt dann, dass die Formel (5) für jeden Fall gültig ist.

Für allgemeine $n \times n$-Matrizen gelten die beiden Laplaceschen Entwicklungssätze

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\tilde{A}_{ik}) \quad \text{für jeden Spaltenindex } 1 \leq k \leq n\,, \\ \det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\tilde{A}_{ik}) \quad \text{für jeden Zeilenindex } 1 \leq i \leq n\,.\end{aligned}$$

Die Matrix $\tilde{A}_{ik} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ensteht dabei aus der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, indem die i-te Zeile und die k-te Spalte gestrichen werden. Die erste Formel heißt „Entwicklung nach der k-ten Spalte", die zweite „Entwicklung nach der i-ten Zeile".

Für die Determinante der Matrix B aus (3) ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} - 0 + 0 = (-3)(-11) - (-6)(-6) = -3\,. \tag{6}$$

Bei $(*)$ wurde der Entwicklungssatz nach der ersten Zeile angewendet. Das ist geschickt, weil die erste Zeile nur noch einen Eintrag ungleich 0 enthält. Ein komplizierteres Beispiel ist

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -2\left(-1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \right) + 3\left(-1 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2(1+8) + 3(-14-9) = -87\,.\end{aligned}$$

Inverse und Cramersche Regel

Aus $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$ für $n \times n$-Matrizen folgt

$$\det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar}\,.$$

Detaillierter kann man folgendes zeigen: Wir definieren eine Matrix B mit den Einträgen

$$b_{ik} = (-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ki})\,.$$

Vergleiche dazu den Laplaceschen Entwicklungssatz und beachte die Indizierung! Dann gilt

$$AB = BA = \det(A)I_n\,.$$

Offenbar ist B „fast" die Inverse von A. Deswegen ist die so konstruierte Matrix B überhaupt von Interesse.

Die Namen und Bezeichnungen sind sehr uneinheitlich. Wir wollen hier die „Adjunkte von A" und „$\operatorname{adj}(A)$" verwenden. Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} \quad \text{mit} \quad \operatorname{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad \bigl(\operatorname{adj}(A)\bigr)_{ik} = (-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ki})\,.$$

In der Regel ist es nicht effizient, auf diese Art und Weise eine Inverse auszurechnen. Für eine 2×2-Matrix ergibt sich jedoch die einprägsame Formel

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die Inverse entsteht, indem die beiden Diagonaleinträge vertauscht werden, die anderen beiden Einträge mit -1 multipliziert werden und alles durch die Determinante dividiert wird.

Für die Adjunkte von B aus (3) gilt z. B.

$$\bigl(\operatorname{adj}(B)\bigr)_{33} = (-1)^{3+3}\det(\tilde{B}_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 4\cdot 2 = -3\,.$$

Mit $\det(B) = -3$ aus (6) folgt

$$(B^{-1})_{33} = \frac{(\operatorname{adj}(B))_{33}}{\det(B)} = 1\,,$$

was mit der Inversenberechnung (4) übereinstimmt. Ein solche Rechnung ist relativ aufwendig und vermutlich nur dann nützlich, wenn man z. B. nur einen Eintrag der Inversen benötigt. Für lineare Gleichungssysteme gibt es eine vergleichbare Formel, die ebenfalls nur selten rechentechnisch praktisch ist:

Ist die Matrix A das linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ invertierbar, dann ist es eindeutig lösbar mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, und dieser Lösungsvektor kann mit der Cramerschen Regel

$$x_k = \frac{\det(\tilde{A}_k)}{\det(A)}$$

berechnet werden. Darin entsteht die Matrix $\tilde{A}_k$, indem die k-te Spalte von A durch die rechte Seite $\vec{b}$ des Gleichungssystems ersetzt wird. Der Zusammenhang zur Adjunkten besteht darin, dass im Fall $\vec{b} = \vec{e}_i$ die Determinante von $\tilde{A}_k$ durch Entwickeln nach der k-ten Spalte berechnet werden kann, wodurch ein Eintrag der Adjunkten entsteht. (In der Spalte steht ja dann nur eine 1, und der Entwicklungssatz liefert eine $(n-1)\times(n-1)$-Determinante.)

4 Eigenwerte

Definition und Motivation

Sei eine $n \times n$-Matrix A gegeben. Ein Skalar λ heißt ein Eigenwert von A, wenn es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

gilt. Jeder Vektor (ungleich dem Nullvektor), der diese Gleichung erfüllt, heißt ein Eigenvektor von A zu λ. Anders gesprochen besitzt ein Eigenvektor $\vec{v}$ die Eigenschaft, dass $A\vec{v}$ parallel zu $\vec{v}$ ist. Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Eigenvektoren zum gleichen λ, so ist auch $r\vec{v} + s\vec{w}$ ein solcher Eigenvektor. Die Menge aller Eigenvektoren einschließlich des Nullvektors heißt auch Eigenraum von A zu λ.

Wir betrachten ein Feder-Masse-System bestehend aus zwei gleichen Massen m und drei gleichen Federn mit Federkonstante D. Sind x_1 und x_2 die Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage, dann gilt für die Kräfte auf die Massen

$$F_1 = -Dx_1 + D(x_2 - x_1)\,, \quad F_2 = -Dx_2 + D(x_1 - x_2)\,.$$

Division durch m und umschreiben ergibt

$$\begin{pmatrix} \dfrac{F_1}{m} \\ \dfrac{F_2}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{D}{m}\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_1 \\ -x_2 + x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \frac{D}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Herumprobieren erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $(1,1)^{\mathrm{T}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $(1,-1)^{\mathrm{T}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -3.

Der erste Fall bedeutet, dass $x_2(t) = x_1(t)$ für alle Zeiten t gilt. Die beiden Differentialgleichungen lauten dann $\ddot{x}_1 = -(D/m)x_1$ und $\ddot{x}_2 = -(D/m)x_2$ mit den bekannten Schwingungslösungen mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{D/m}$. Der zweite Fall bedeutet, dass $x_2(t) = -x_1(t)$ für alle Zeiten t gilt. Die erste Differentialgleichung lautet dann $\ddot{x}_1 = -(D/m)x_1 + (D/m)(x_2 - x_1) = -(3D/m)x_1$. Sie hat von der Struktur her dieselbe Lösung, aber mit größerer Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{3D/m}$. Die allgemeine Lösung ergibt dann durch Überlagerung, also

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) + a_2 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) + a_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3D}{m}}\,t\right) + a_4 \sin\left(\sqrt{\frac{3D}{m}}\,t\right), \\ x_2 &= a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) + a_2 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right) - a_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3D}{m}}\,t\right) - a_4 \sin\left(\sqrt{\frac{3D}{m}}\,t\right) \end{aligned}$$

mit beliebigen Anfangsbedingungen a_1, a_2, a_3, a_4.

Charakteristisches Polynom

Wir müssen untersuchen, wann es $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ gibt. Dies können wir umformen zu $\lambda\vec{v} - A\vec{v} = \vec{0}$ und weiter in das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\lambda I_n - A)\vec{v} = \vec{0}\,.$$

Wenn das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, können wir für $\vec{v}$ nur den Nullvektor erwarten. Wenn wir nicht-triviale Lösungsvektoren verlangen, müssen wir fordern, dass die obenstehende Matrix $\lambda I_n - A$ nicht invertierbar ist, was äquivalent dazu ist, dass ihre Determinante 0 ist. Es gilt daher der wichtige Zusammenhang:

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0\,.$$

Dies ist der Ausgangspunkt zur Berechnung der Eigenwerte.

Wir geben der obigen Determinante einen Namen: Ist A eine $n \times n$-Matrix, dann ist

$$\chi_A(s) = \det(sI_n - A)$$

ein Polynom vom Grad n in s und heißt das charakteristische Polynom von A. Die Eigenwerte einer Matrix sind damit genau die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms. Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix wird somit auf die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms zurückgeführt. Da ein Polynom über den reellen Zahlen im Allgemeinen gar keine Nullstellen haben muss, z. B. ist $(s^2+1)^3$ ein solches vom Grad 6, muss eine Matrix auch überhaupt keine Eigenwerte haben. Lässt man aber komplexe Skalare als Eigenwerte zu, dann hat jede Matrix mit Vielfachheiten gezählt n Eigenwerte, weil jedes Polynom vom Grad n über den komplexen Zahlen n Nullstellen besitzt (Fundamentalsatz der Algebra).

Mit der Matrix C aus dem Feder-Masse-Beispiel ergibt sich

$$\chi_C(s) = \det(sI_2 - C) = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = (s+2)^2 - 1 = s^2 + 4s + 3\,.$$

Die Nullstellen dieses quadratischen Polynoms sind offenbar $-2 \pm \sqrt{4-3}$, also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$. Für die 4×4-Matrix A aus (2) folgt nach längerer Rechnung

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} s-1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & s-6 & -7 & -8 \\ -9 & -10 & s-11 & -12 \\ -13 & -14 & -15 & s-16 \end{vmatrix} = \ldots = s^2(s^2 - 34s - 80)\,.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_{1;2} = 0$ (doppelt) und $\lambda_{3;4} = 17 \pm \sqrt{17^2 + 80} = 17 \pm 3\sqrt{41}$.

Koordinatentransformationen

Koordinatentransformationen sind ein relativ allgemeines Kapitel in der linearen Algebra und haben zunächst erst einmal nichts mit Eigenwerten zu tun. Allerdings kann man mit ihrer Hilfe spezielle Transformationen mit besonderen Eigenschaften herleiten und durchführen. Wir betrachten das bei unserem Feder-Masse-Beispiel: Ausgehend von den Variablen x_1 und x_2 definieren wir zunächst „willkürlich“

$$y_1 = x_1 + x_2\,, \quad y_2 = x_1 - x_2\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{D}{m}(-2x_1 + x_2) + \frac{D}{m}(x_1 - 2x_2) = -\frac{D}{m}(x_1 + x_2) = -\frac{D}{m}\, y_1\,,\\ \ddot{y}_2 &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{D}{m}(-2x_1 + x_2) - \frac{D}{m}(x_1 - 2x_2) = -\frac{3D}{m}(x_1 - x_2) = -\frac{3D}{m}\, y_2\,.\end{aligned}$$

Aus den zwei gekoppelten Differentialgleichungen in den Variablen x_1 und x_2 sind zwei entkoppelte in den Variablen y_1 und y_2 geworden. Wenn wir das System wieder in Matrixform schreiben, erhalten wir

$$\begin{pmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{pmatrix} = \frac{D}{m}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

mit einer Diagonalmatrix.

Wir können auch die Transformation selbst als Matrix schreiben, und zwar

$$\vec{y} = P\vec{x} \quad \text{mit} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\vec{x} = P^{-1}\vec{y}$ und

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{D}{m}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\vec{x} \implies P^{-1}\ddot{\vec{y}} = \frac{D}{m}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}P^{-1}\vec{y} \implies \ddot{\vec{y}} = \frac{D}{m}P\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}P^{-1}\vec{y}.$$

Wegen $P^{-1} = \frac{1}{2}P$ gilt für die neue Matrix

$$P\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

in Übereinstimmung mit der obigen Rechnung.

Den Übergang von A zu PAP^{-1} nennt man Basistransformation einer Matrix. Im Beispiel vermittelt das gewählte P eine Basistransformation auf Diagonalgestalt. Die Diagonaleinträge sind dann zwangsläufig die Eigenwerte der ursprünglichen Matrix. Ob und wann eine solche Transformation möglich ist und wie die zugehörige Transformationsmatrix P berechnet werden kann, liefert die Eigenwerttheorie. Wir halten hier als Begriff fest: Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine Transformation auf Diagonalgestalt gibt, d. h. wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, so dass PAP^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Eigenvektoren

Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann hat das lineare Gleichungssystem $(A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen für $\vec{v}$, und jede solche Lösung heißt ein Eigenvektor von A zu λ. Für das Feder-Masse-Beispiel ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda = -1: &\quad A + I_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \implies \vec{v} = s\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\\ \lambda = -3: &\quad A + 3I_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \implies \vec{v} = s\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tatsächlich sind diese beiden Eigenvektoren genau die beiden Spalten der Transformationsmatrix P^{-1}. Da die beiden Vektoren Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind, sind sie automatisch linear unabhängig. Speziell ist klar, dass ein Vektor höchstens Eigenvektor zu einem Eigenwert sein kann, denn

$$\lambda_1 \vec{v} = A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v}$$

kann natürlich niemals für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ gelten.

Wir betrachten noch eine neue Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \chi_B(s) &= \begin{vmatrix} s-5 & 6 & -1 \\ -2 & s+3 & -1 \\ -2 & 6 & s-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-5 & 6 & -1 \\ -2 & s+3 & -1 \\ -s+3 & 0 & s-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-6 & 6 & -1 \\ -3 & s+3 & -1 \\ 0 & 0 & s-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} s & 6 & -1 \\ s & s+3 & -1 \\ 0 & 0 & s-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 6 & -1 \\ 0 & s-3 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 \end{vmatrix} = s(s-3)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda = 0: \quad B - 0I_3 &= \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda = 3: \quad B - 3I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Vektoren ist dann eine mögliche Transformationsmatrix

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich überführt diese Transformation die Matrix B auf Diagonalgestalt, nämlich

$$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

und auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit. Es hätte passieren können, dass es zum Eigenwert 3 nur einen Eigenvektor gegeben hätte. Dann hätte man aus den Eigenvektoren keine Transformationsmatrix konstruieren können, und die Ausgangsmatrix wäre dann auch nicht diagonalisierbar gewesen.

Ähnliche Matrizen

Der Begriff Ähnlichkeit ist eigentlich nur synonym zu etwas, was wir schon definiert haben: Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn man die eine durch Koordinatentransformation in die andere überführen kann, d. h. es gibt eine invertierbare Matrix P mit $B = PAP^{-1}$.

Insbesondere nennt man diagonalisierbare Matrizen auch diagonal-ähnlich, weil sie eben ähnlich zu einer Diagonalmatrix sind. Zwei ähnliche Matrizen teilen viele Gemeinsamkeiten, was auch die Bezeichnung erklärt. Alles folgt immer daraus, dass die Transformationsmatrix P invertierbar ist und daher vollen Rang besitzt.

Als erste Eigenschaft gilt aufgrund des Determinanten-Multiplikationssatzes

$$\det(B) = \det\bigl(PAP^{-1}\bigr) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A)\frac{1}{\det(P)} = \det(A)\,,$$

d. h. ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante. Auch die Ränge stimmen überein, d. h.

$$\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(A)\,.$$

Das ergibt sich letztlich daraus, dass invertierbare Transformationen linear unabhängige Vektoren auf wieder solche abbilden, d. h.

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \text{ linear unabhängig} \quad\Longrightarrow\quad P\vec{v}_1, \ldots, P\vec{v}_m \text{ linear unabhängig}\,.$$

Weiter gilt

$$\chi_B(s) = \det(sI-B) = \det\bigl(PsIP^{-1}-PAP^{-1}\bigr) = \det\bigl(P(sI-A)P^{-1}\bigr) = \det(sI-A) = \chi_A(s)\,,$$

d. h. ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und daher auch dieselben Eigenwerte. Das erklärt noch einmal, warum nach der Diagonalisierung die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen müssen. Da sich Eigenwerte und Determinante nicht verändern, gilt für eine diagonalisierbare Matrix

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n\,.$$

Eine weitere Größe einer quadratischen $n \times n$-Matrix A ist die sogenannte Spur. Sie ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge

$$\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\,.$$

Einige Regeln sind

$$\mathrm{Spur}(sA+tB) = s\,\mathrm{Spur}(A) + t\,\mathrm{Spur}(B)\,,\quad \mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)\,,\quad \mathrm{Spur}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Spur}(A)\,.$$

Sind nun wieder A und B ähnliche Matrizen, so gilt

$$\mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}\bigl(PA \cdot P^{-1}\bigr) = \mathrm{Spur}\bigl(P^{-1} \cdot PA\bigr) = \mathrm{Spur}(A)\,,$$

d. h. ähnliche Matrizen haben auch dieselbe Spur. Das lässt sich bei den Matrizen des letzten Abschnitts leicht überprüfen.

Grundlegendes

Matrix	$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$	$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
Spalten-vektor	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
Zeilenvektor	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 5}$
Skalar	$r \in \mathbb{R}$	$r = 7 \in \mathbb{R}$
Trans-ponierte	$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$	$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
Addition	$C = A + B\,,\quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Skalarmulti-plikation	$C = rA\,,\quad c_{ik} = r\,a_{ik}$ $A, C \in \mathbb{R}^{m\times n}\,,\ r \in \mathbb{R}$	$-4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
Matrizen-produkt	$C = AB\,,\quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ $A \in \mathbb{R}^{m\times p}\,,\ B \in \mathbb{R}^{p\times n}\,,\ C \in \mathbb{R}^{m\times n}$	$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 0 & -8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + (B + C) = (A + B) + C\,,\quad A + B = B + A\,,$$
$$(st)A = s(tA)\,,\quad (s+t)A = sA + tA\,,\quad s(A+B) = sA + sB\,,\quad A(BC) = (AB)C\,,$$
$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}\,,\quad (sA)^{\mathrm{T}} = s\,A^{\mathrm{T}}\,,\quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\,,\quad (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$$

Lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

linear unabhängig	$\sum_k s_k \vec{v}_k = \vec{0} \implies$ alle $s_k = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabh. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abh.
Rang	Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen	$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ $\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$
Einheits-matrix	$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Inverse	A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A^{-1})^{-1} = A\,,\quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}\,,\quad (sA)^{-1} = \frac{1}{s} A^{-1}\,,\quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Determinanten

1×1	$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$	$\det \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \end{vmatrix} = -5$
2×2	$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$	$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$
multilinear	$\begin{vmatrix} \cdots & s\vec{b} + t\vec{c} & \cdots \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} \cdots & \vec{b} & \cdots \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} \cdots & \vec{c} & \cdots \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
alternierend	$\begin{vmatrix} \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{c} & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \vec{c} & \cdots & \vec{b} & \cdots \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
Entwicklung nach k-ter Spalte	$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\tilde{A}_{ik})$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$
Entwicklung nach i-ter Zeile	$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\tilde{A}_{ik})$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
Dreiecks-matrix	$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 4 = -12$

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)\,, \quad \det(sA) = s^n \det(A)\,, \quad \det(AB) = \det(BA)\,, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,,$$

$$\det(A) \neq 0 \iff \mathrm{Rang}(A) = n\,, \quad A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}\,, \quad \big(\mathrm{adj}(A)\big)_{ik} = (-1)^{i+k} \det(\tilde{A}_{ki})$$

Eigenwerte

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \iff A\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ für ein geeignetes } \vec{v} \neq \vec{0} \iff \det(\lambda I_n - A) = 0$$

charakte-ristisches Polynom	$\chi_A(s) = \det(sI_n - A)$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \implies \chi_A(s) = \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -4 & s-5 \end{vmatrix} = s^2 - 7s - 2$
Spur	$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$	$\mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$

$$\mathrm{Spur}(sA + tB) = s\,\mathrm{Spur}(A) + t\,\mathrm{Spur}(B)\,, \quad \mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)\,, \quad \mathrm{Spur}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Spur}(A)\,,$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n\,, \quad \mathrm{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n\,;$$

$$B \text{ ähnlich zu } A \iff B = PAP^{-1} \text{ für ein geeignetes } P$$

$$\implies \det(B) = \det(A)\,, \quad \mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(A)\,, \quad \chi_B(s) = \chi_A(s)\,, \quad \mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}(A)$$

